Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 9
(21– 27 Novembre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso "Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare" di M. Abate e C. De Fabritiis, capitolo 9.

Esercizio 1. Calcola il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & \pi \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Utilizzando il determinante, decidi per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$, i seguenti sistemi hanno soluzione unica. Per tali valori, trova la soluzione usando Cramer.

$$\begin{cases} x + y + (t-1)z = 1 \\ 2x + ty + tz = t \\ tx + 2(t-1)y + 2z = 4 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + w = 0 \\ x - ty + 2z + w = t + 2 \\ 2x - 4y + (3t-2)z + (4-t)w = 8 \\ 4x - 5y + 11z + (6-t)w = 7 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + w = 1 \\ x + ty - z - w = 5 \\ -x + y + z + w = 1 \\ (1-t^2)x + 3y + 4z + (1+t^2)w = 1 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + ty - z = t \\ tx - y + 2z = 3 \\ x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

Esercizio 3. Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ -1 & \pi & 2 \\ \sqrt{2} & 7 & 333 \end{pmatrix} = 1$$

Calcola i determinanti delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ -1/2 & \pi/2 & 1 \\ \sqrt{2}/3 & 7/3 & 111 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x-1 & y+\pi & z+2 \\ \sqrt{2}-1 & 7-\pi & 331 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & y & y-z \\ \pi x - 1 & \pi(y+1) & \pi(y-z+1)-2 \\ \sqrt{2} & 7 & -326 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Al variare del parametro $k \in \mathbf{C}$ calcola i determinanti delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} k-i & 1 & -1 \\ 0 & 1-ik & 2-3i \\ 1+2i & i-1 & k+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 & 1 \\ k & 1 & 2i & 1-i \\ ik+3 & 0 & 1-i & 1-3i \\ 1 & k & ik & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Verifica che la matrice

$$\begin{pmatrix} 5k & k+3 \\ k-1 & k \end{pmatrix}$$

è invertibile per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$. Cosa accade se $k \in \mathbf{C}$?

Esercizio 6. Sia $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Dimostra che $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

Esercizio 7. Dimostra che la seguente matrice è invertibile e trovane l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

[Suggerimento: osservare che la matrice è simmetrica, ovvero uguale alla sua trasposta, per cui anche l'inversa ha la stessa proprietà (perchè?). Questo ci dice che non dobbiamo calcolare i determinanti di tutte le matrici B_{ij} ma solo di quelle tali che $i \leq j$ (ed è un bel vantaggio!). Osservare che se moltiplichiamo la prima riga per 12, la seconda per 60, la terza per 60 e la quarta per 840 otteniamo la seguente matrice con entrate intere:

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 4 & 3 \\ 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 10 \\ 210 & 168 & 140 & 120 \end{pmatrix}.$$

Se chiamiamo la matrice dell'esercizio A, e la matrice cosi ottenuta A', questo vuol dire che $A' = DA$ dove D è la matrice diagonale $D = diag(12, 60, 60, 840)$. Questo ci dice (convincersene!) che $det(A) = det(D)^{-1}det(A')$ ed inoltre $A^{-1} = (A'^{-1})D$. Per cui per trovare A^{-1} basta trovare l'inversa di A' e poi moltiplicare le sue *colonne* rispettivamente per 12, 60, 60, 840. La soluzione dell' esercizio si trova a pagina 357 del libro di testo.]