Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 13
(19 – 25 Dicembre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso "Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare" di M. Abate e C. De Fabritiis.

Esercizio 1. Sia $q = q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q(X) := X \cdot AX$, la forma quadratica associata alla matrice simmetrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supponiamo che q sia definita positiva. Quindi la matrice A ha tutti i suoi autovalori positivi e possiamo ordinarli dal più grande al più piccolo: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. Dimostrare che $q(X) \geq \lambda_n ||X||^2$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 2. Calcola la distanza del punto $P_0 = (3, 1, -2)$ dalla retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + z = 4, \\ x - 4y + z = 5; \end{cases}$$

Esercizio 3. Calcola la distanza del punto $P_0 = (5, 0, 2)$ dal piano di equazione $3x - 2y + 7z = 9$.

Esercizio 4. Calcola la distanza tra le due rette di $\mathbb{R}^3$ (dotato del prodotto scalare standard) di equazioni cartesiane:

$$r_0 : \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y + z = 1; \end{cases} \qquad r_1 : \begin{cases} x - y = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. Calcola la distanza fra la retta r_0 di equazioni parametriche

$$r_0 : \;\; x = t - 2, \;\; y = 2t - 1, \;\; z = 2t - 3$$

e la retta r_1 di equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} x - y - z = 2, \\ 2x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

Esercizio 6. Date le rette r_1 ed r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1: \begin{cases} x = 2+s, \\ y = -2s, \\ z = -1+3s \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x+y+2z = 0, \\ x+y+z = 0. \end{cases}$$

calcola la distanza tra r_1 e la retta s passante per $P_0 = (2,1,3)$, ortogonale a r_1 e incidente a r_2.

Esercizio 7. Verifica che la retta r_0 di equazioni parametriche

$$r_0: \;\; x = -2t, \quad y = -1-t, \quad z = 1-t$$

e la retta r_1 di equazioni cartesiane

$$r_1: \begin{cases} y - z = -1, \\ 2x - y - z = 0, \end{cases}$$

sono sghembe. Scrivi equazioni parametriche e cartesiane della retta ρ perpendicolare a entrambe e incidente sia a r_0 che a r_1. Trova i punti di intersezione H_0 ed H_1 rispettivamente con r_0 ed r_1 e verifica che $dist(r_0, r_1) = dist(H_0, H_1)$.

Esercizio 8. Ridurre in forma canonica affine la conica $\mathcal{C}_p$ dove p è uno dei polinomi elencati di seguito:

1. $p(x,y) := x^2 + 4xy + 2y^2 - x - y - 1$;
2. $p(x,y) := 3x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x - 4y - 2$.
3. $p(x,y) := xy + x - 3y + 4$.
4. $p(x,y) := 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 2y + 1$.
5. $p(x,y) := x^2 + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 9$.
6. $p(x,y) := x^2 + y^2 + 8x - 8y - 2xy + 15$.
7. $p(x,y) := x^2 + y^2 - 6x - 3$.
8. $p(x,y) := x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 8$.
9. $p(x,y) := x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 10$.
10. $p(x,y) := x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 6y + 9$.