Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

18 Gennaio 2018

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali* $x_1, \cdots, x_5$*, dipendente dal parametro* $k \in \mathbf{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ kx_1 + x_2 + (1-2k)x_3 + kx_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 + (1+k)x_4 + (2k)x_5 &= k \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *(3 punti) Trovare i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile.*
3. *(3 punti) Per i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Soluzione Esercizio 1. *La matrice dei coefficienti del sistema*

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1-2k & k & 1 \\ 1 & k & k-2 & 1+k & 2k \end{pmatrix}$$

Riduciamo a scala (senza dividere per polinomi in k*):*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1-2k & k & 1 \\ 1 & k & k-2 & 1+k & 2k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & k & k & 2k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}$$

Poiché non abbiamo eseguito scambi di riga, troviamo la decomposizione $A_k = L_k U_k$ *dove*

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad U_kj = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}.$$

Posto $b = (1, 1, k)^t$ *il vettore dei termini noti, risolviamo il sistema triangolare inferiore* $LY = b$*: troviamo la forma a scala ridotta della matrice completa (L—b), stando attenti a non dividere per polinomi in k:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 & 1 \\ k & k & 1 & k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-k \\ 0 & k & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 1 & k^2-k \end{array}\right)$$

troviamo quindi che l'unica soluzione del sistema $LY = b$ *é* $Y = (1, 1-k, k^2-k)^t$*. Risolviamo adesso il sistema* $UX = Y$*. Per trovare la forma a scala ridotta di tale sistema dobbiamo distinguere i due casi* $k = 0$ *oppure* $k \neq 0$*: se* $k = 0$

Esercizio 2. *Siano* $v_1 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}})^t$ *e* $v_2 = (\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}, 0)^t$ *due vettori di* $\mathbb{R}^3$.

1. *(1 punto) Scrivere la matrice* $A = (a_{ij})$ *definita come segue:* $a_{ij} = v_i \cdot v_j$.
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di* A *ed il suo spettro.*
3. *(1 punto) Stabilire se* A *è definita positiva, giustificando la risposta.*
4. *(3 punti) Determinare, se esiste, una base ortonormale di* $\mathbb{R}^2$ *composta di autovettori per* A.
5. *(1 punto) Calcolare* $\lim_{n\to\infty} A^n$.

Esercizio 3. *Si consideri il seguente grafo orientato* Γ *su* 3 *vertici*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\ & 3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

1. *(1 punto) Si determini la matrice di adiacenza* $A = A_\Gamma$ *di* Γ.
2. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di* A.
3. *(2 punti) Calcolare* A^2 *ed* A^3.
4. *(2 punti) Calcolare l'inversa di* A *usando il teorema di Cayley-Hamilton.*

Esercizio 4. *Si considerino i seguenti dati:* $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, -1)$.

1. *(3 punti) Usando la decomposizione QR, calcolare il polinomio di primo grado che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i dati.*
2. *(2 punti) Calcolare il polinomio del punto precedente senza usare la decomposizione QR.*
3. *(1 punto) Trovare il polinomio interpolatore dei tre dati.*
4. *(1 punto) Rappresentare graficamente i dati ed i polinomi trovati.*

Esercizio 5. *Si considerino i seguenti tre punti dello spazio euclideo:*

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punti) Dimostrare che P, Q ed R non sono collineari.*
2. *(1 punto) Calcolare il perimetro del triangolo di vertici P, Q ed R.*
3. *(2 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici P, Q ed R.*
4. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per Q ed R.*
5. *(1 puntp) Calcolare la distanza di P dalla retta passante per Q ed R.*