

Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

18 Gennaio 2018

Esercizio 1. *Si consideri la matrice*

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A ed il suo spettro. Dedurre che A è definita positiva.*
2. (1 punto) *Stabilire se esiste l'inversa di A e nel caso calcolarla.*
3. (3 punti) *Determinare, se esiste, una base ortonormale di \mathbb{R}^2 composta di autovettori per A .*
4. (2 punti) *Calcolare A^6 .*

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x_1, \dots, x_5 , dipendente dal parametro $k \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ kx_1 + x_2 + (1 - 2k)x_3 + kx_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + kx_2 + (k - 2)x_3 + (1 + k)x_4 + (2k)x_5 = k \end{cases}$$

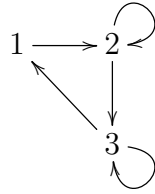
1. (1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.
2. (3 punti) Trovare i valori di k per i quali il sistema è compatibile.
3. (3 punti) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti tre punti dello spazio euclideo:*

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punti) *Dimostrare che P , Q ed R non sono collineari.*
2. (2 punti) *Calcolare l'area del triangolo di vertici P , Q ed R .*
3. (1 punto) *Calcolare il perimetro del triangolo di vertici P , Q ed R .*
4. (2 punti) *Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per Q ed R .*
5. (1 punto) *Calcolare la distanza di P dalla retta passante per Q ed R .*

Esercizio 4. Si consideri il seguente grafo orientato Γ su 3 vertici



1. (1 punto) Si determini la matrice di adiacenza $A = A_\Gamma$ di Γ .
2. (2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
3. (2 punti) Calcolare A^2 .
4. (2 punti) Calcolare l'inversa di A usando il teorema di Cayley-Hamilton.

Esercizio 5. *Si considerino i seguenti dati: $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 2)$.*

1. *(3 punti) Usando la decomposizione QR, calcolare il polinomio di primo grado che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i dati.*
2. *(2 punti) Calcolare il polinomio del punto precedente senza usare la decomposizione QR.*
3. *(1 punto) Trovare il polinomio interpolatore dei tre dati.*
4. *(1 punto) Rappresentare graficamente i dati ed i polinomi trovati.*