Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

24 Gennaio 2018

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali* $x_1, \cdots, x_5$*, dipendente dal parametro* $k \in \mathbf{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ kx_1 + x_2 + (1-2k)x_3 + kx_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 + (1+k)x_4 + (2k)x_5 &= k \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*

2. *(3 punti) Trovare i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile.*

3. *(3 punti) Per i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Esercizio 2. *Si consideri la matrice*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di* A *ed il suo spettro. Dedurre che* A *è definita positiva.*

2. *(1 punto) Stabilire se esiste l'inversa di* A *e nel caso calcolarla.*

3. *(3 punti) Determinare, se esiste, una base ortonormale di* $\mathbb{R}^2$ *composta di autovettori per* A*.*

4. *(2 punti) Calcolare la norma di* $(1, 2)$ *rispetto al prodotto scalare indotto da* A*.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice* 3×3 *dipendente da un parametro reale* k*:*

$$A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 2 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Determinare per quali* $k \in \mathbb{R}$ *la matrice* A_k *è invertibile.*
2. *(3 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di* A_k*.*
3. *(2 punti) Calcolare l'inversa di* A_{-1}*.*

Esercizio 4. *Si consideri la conica* $\mathcal{C}_p$ *associata al polinomio*

$$p(x_1, x_2) := 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 14x_1 - 22x_2 + 29$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice della conica e della sua parte quadratica.*
2. *(3 punti) Trovare un cambiamento di coordinate che diagonalizzi ortogonalmente la parte quadratica di* p*.*
3. *(2 punti) Trovare il centro della conica.*
4. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{C}_p$ *è affinemente equivalente ad una ellisse.*

Esercizio 5. *Si considerino i due sottospazi* π_1 *e* π_2 *di* $\mathbb{R}^3$ *dati dalle seguenti equazioni:*

$$\pi_1 : 2x - y + z = 0; \quad \pi_2 : x + y - z = 0.$$

1. *Trovare una base di* π_1*.*
2. *Trovare una base di* π_2*.*
3. *Trovare una base di* $\pi_1 \cap \pi_2$*.*
4. *Determinare le matrici che rappresentano rispettivamente la proiezione ortogonale su* $\pi_1 \cap \pi_2$*, su* π_1 *e su* π_2*, rispetto alla base standard di* $\mathbb{R}^3$*.*
5. *Calcolare la distanza di* $P := (6, -6, 6)$ *rispettivamente da* $\pi_1 \cap \pi_2$*, da* π_1 *e da* π_2*.*