Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1 (2016/17)
Docente: Giovanni Cerulli Irelli
18 Gennaio 2018

18 Gennaio 2018

Esercizio 1. *Si consideri la conica $\mathcal{C}_p$ associata al polinomio*

$$p(x_1, x_2) := 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 14x_1 - 22x_2 + 29$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice della conica e della sua parte quadratica.*
2. *(3 punti) Trovare un cambiamento di coordinate che diagonalizzi ortogonalmente la parte quadratica di p.*
3. *(2 punti) Trovare il centro della conica.*
4. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{C}_p$ è affinemente equivalente ad una ellisse.*

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti tre punti dello spazio euclideo:*

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punti) Dimostrare che P, Q ed R non sono collineari.*
2. *(2 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici P, Q ed R.*
3. *(1 punto) Calcolare il perimetro del triangolo di vertici P, Q ed R.*
4. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per Q ed R.*
5. *(1 punto) Calcolare la distanza di P dalla retta passante per Q ed R.*

Esercizio 3. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali* $x_1, \cdots, x_5$*, dipendente dal parametro* $k \in \mathbf{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 & = & 1 \\ kx_1 + x_2 + (1-2k)x_3 + kx_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 + (1+k)x_4 + (2k)x_5 & = & k \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *(3 punti) Trovare i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile.*
3. *(3 punti) Per i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Esercizio 4. *Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $x-2y+z=0$.*

1. *(1 punto) Trovare una base per U.*
2. *(1 punto) Trovare una base ortonormale di U.*
3. *(2 punti) Trovare la proiezione ortogonale su U del vettore $P=(1,2,-1)^T$.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza di P da U.*
5. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane per la retta ortogonale a U e passante per P.*

Esercizio 5. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
3. *(2 punti) Sia* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *l'unica applicazione lineare tale che*

   $$f(v_1) = w_1 + w_2, \quad f(v_2) = w_2 - w_1, \quad f(v_3) = w_1 - w_2, \quad f(v_4) = w_2.$$

   Scrivere la matrice che rappresenta f *nelle basi canoniche di* $\mathbb{R}^4$ *ed* $\mathbb{R}^3$.
4. *(1 punto) Calcolare base e dimensione del nucleo di* f.
5. *(1 punto) Calcolare base e dimensione dell'immagine di* f.