Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

15 Febbraio 2018

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali* $x_1, \cdots, x_6$*, dipendente dal parametro* $k \in \mathbf{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - kx_4 - kx_6 &= k-2 \\ 3x_1 + 3kx_2 + x_3 - kx_4 - (k+2)x_6 &= k^2+3k-5 \\ x_1 + kx_2 + x_3 + kx_4 + k(k-1)x_5 + (4k-2)x_6 &= k^2+2k-2 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *(3 punti) Trovare i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile.*
3. *(3 punti) Per i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$*:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e che* $\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$*.*

2. *(1 punto) Si consideri l'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *data da*

   $$T(v_1) = w_1 - w_2, \quad T(v_2) = w_1 + w_2 - w_3, \quad T(v_3) = w_3 - 2w_1.$$

   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$*.*

3. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nelle basi standard.*

4. *(1 punto) Determinare una base del nucleo di* T*.*

5. *(1 punto) Determinare una base dell'immagine di* T*.*

Esercizio 3. *Sia data, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice*

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k+1 & 2-k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+3 \end{pmatrix}$$

1. *(4 punto) Determinare i valori di k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$* [Suggerimento: usare il fatto che A_k è a blocchi].
2. *(1 punti) Determinare i valori di k per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. *(2 punti) Per i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, trovare una base ortonormale di autovettori per A_k.*

Esercizio 4. *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + span\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

1. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per r ed una forma cartesiana per s.*
2. *(1 punto) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per il punto $P = (-1, 0 - 1)^t$ e la retta r.*
3. *(2 punti) Determinare la posizione reciproca di r ed s.*
4. *(3 punti) Calcolare la distanza di r ed s.*

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice $A \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$ ed il seguente vettore $b \in \mathbb{R}^3$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(3 punti) Calcolare la decomposizione QR di A e utilizzarla per trovare tutte le soluzioni approssimate del sistema $AX = b$.*

2. *(1 punto) Calcolare tutte le soluzioni approssimate del sistema $AX = b$, senza utilizzare la decomposizione QR di A.*

3. *(1 punto) Calcolare i valori singolari di A.*

4. *(2 punti) Trovare la decomposizione ai valori singolari di A.*