Prova scritta di Geometria 1 (2016/17)
Docente: Giovanni Cerulli Irelli
15 Febbraio 2018

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali* $x_1, \cdots, x_6$*, dipendente dal parametro* $k \in \mathbf{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 - (k-1)x_4 - (k-1)x_6 = k-3 \\ 3x_1 + 3(k-1)x_2 + x_3 - (k-1)x_4 - (k+1)x_6 = k^2 + k - 7 \\ x_1 + (k-1)x_2 + x_3 + (k-1)x_4 + (k-2)(k-1)x_5 + (4k-6)x_6 = k^2 - 3 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *(3 punti) Trovare i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile.*
3. *(3 punti) Per i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$*:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e che* $\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$*.*
2. *(1 punto) Si consideri l'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *data da*

   $$T(v_1) = w_1 - w_2, \quad T(v_2) = w_1 + w_2 - w_3, \quad T(v_3) = w_3 - 2w_1.$$

   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$*.*

3. *(2 punti) Scrivere la matrice C che rappresenta T nelle basi standard.*

4. *(1 punto) Determinare una base del nucleo di T.*

5. *(1 punto) Determinare una base dell'immagine di T.*

Esercizio 3. *Sia data, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice*

$$A_k = \begin{pmatrix} 2k+5 & -k & 0 \\ k+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+5 \end{pmatrix}$$

1. *(4 punto) Determinare i valori di k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$* [Suggerimento: usare il fatto che A_k è a blocchi].

2. *(1 punti) Determinare i valori di k per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.*

3. *(2 punti) Per i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, trovare una base ortonormale di autovettori per A_k.*

Esercizio 4. *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + span\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

1. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per r ed una forma cartesiana per s.*

2. *(1 punto) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per il punto $P = (-1, 0 - 1)^t$ e la retta r.*

3. *(2 punti) Determinare la posizione reciproca di r ed s.*

4. *(3 punti) Calcolare la distanza di r ed s.*

Esercizio 5. *Sia U il sosttospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai due vettori $v_1 = (1, -1, 1)$ e $v_2 = (1, 1, -1)$.*

1. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane per U.*

2. *(2 punti) Trovare una base ortonormale di U ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.*

3. *(2 punti) Trovare la proiezione ortogonale di $P = (2, 2, 1)$ su U.*

4. *(1 punto) Calcolare la distanza di $P = (2, 2, 1)$ da U.*

5. *(1 punto) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta passante per $P = (2, 2, 1)$ ed ortogonale ad U.*