Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

5 Giugno 2018

Esercizio 1. *Sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la funzione* $T((x,y,z)^t) = \begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ 4x-y+2z \end{pmatrix}$.
Si considerino i due insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = (1,2,3)^t, v_2 = (1,1,0)^t, v_3 = (1,3,5)^t\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{w_1 = (2,3)^t, w_2 = (1,2)^t\}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* T *è lineare.*
2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathcal{B}_2$ *è una base di* $\mathbb{R}^2$.
3. *(1 punto) Sia* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$L(w_1) = 3v_1 - 4v_2 + v_3, \quad L(w_2) = -2v_1 + v_3.$$

   Determinare la matrice che rappresenta L *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$.
4. *(2 punti) Scrivere la matrice che rappresenta* $L \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *nella base standard di* $\mathbb{R}^3$.
5. *(2 punti) Determinare una base per il nucleo ed una base per l'immagine di* $L \circ T$.

Sol.: 1) Dato $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, si ha $T(X) = AX$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dalle proprietà del prodotto righe x colonne di matrici, segue che T è lineare.

2) Poiché $|\mathcal{B}_1| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ e $|\mathcal{B}_2| = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, è sufficiente verificare che $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ siano linearmente indipendenti. Consideriamo le matrici

$$B_1 = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad e \quad B_2 = (w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det B_1 = 1 \neq 0$ e $\det B_2 = 1 \neq 0$, quindi $rg\, B_1 = 3$ e $rg\, B_2 = 2$. Ne segue che le colonne delle due matrici sono linearmente indipendenti.

3) La matrice che rappresenta L nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ ha per colonne le coordinate di $L(w_1)$ e $L(w_2)$ nella base $\mathcal{B}_1$, rispettivamente. Essa è quindi:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_{e_3}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{e_2}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{e_3}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B_2"] \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "B_1"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

La matrice che rappresenta $L \circ C$ in $e_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ è

$$Z = B_1 C B_2^{-1} A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & -7 \\ -2 & 46 & -27 \\ -2 & 109 & -63 \end{pmatrix}$$

5) $$\operatorname{Ker} L \circ T = \operatorname{Ker} Z = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Im} L \circ T = \langle Z^1, Z^2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 46 \\ 109 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{P}_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a due (in una variabile). Si consideri la funzione $(-,-) : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ definita come segue*

$$(p, q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

1. *(1 punti) Dimostrare che $(-,-)$ è un prodotto scalare su $\mathbb{P}_2$.*
2. *(1 punto) Nello spazio metrico $(\mathbb{P}_2, (-,-))$, calcolare il coseno dell'angolo tra $p(x) = 1 - x + x^2$ e $q(x) = 1 + x$.*
3. *(1 punto) Nello spazio metrico $(\mathbb{P}_2, (-,-))$, calcolare la norma di $p(x) = 1 + 2x - x^2$.*
4. *(1 punto) Nello spazio metrico $(\mathbb{P}_2, (-,-))$, calcolare la proiezione ortogonale di $p(x) = 2x$ sulla retta generata da $q(x) = 1 - x^2$.*
5. *(1 punto) Stabilire se $\{1, x, x^2\}$ é una base ortonormale di $(\mathbb{P}_2, (-,-))$.*
6. *(2 punti) Trovare una base ortonormale $\{E_1, E_2, E_3\}$ di $(\mathbb{P}_2, (-,-))$ tale che $Span\{E_1\} = Span\{1\}$ e $Span\{E_1, E_2\} = Span\{1, x\}$.*

1) Verifichiamo che (1) è a) SIMMETRICA, b) BILINEARE, c) DEFINITA POSITIVA:

a) $(p|q) = (q|p)$ perché $p(x)q(x) = q(x)p(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Segue dal fatto che

$$(\alpha p + \beta q)(x)t(x) = \alpha\, p(x)t(x) + \beta\, q(x)t(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall p, q, t \in \mathbb{P}_2$

c) $(p|p) = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 \geq 0$

$(p|p) = 0 \iff p(-1) = p(0) = p(1) = 0.$

In questo caso, p ha almeno 3 radici distinte. Poiché p ha grado ≤ 2, per il teorema fondamentale dell'algebra, p deve essere il polinomio nullo.

2) $p(x)=1-x+x^2,\ q(x)=1+x \Rightarrow (p|q)=3\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2=3,$

$\|p\|^2=3^2+1^2+1^2=11,\ \|q\|^2=0^2+1^2+2^2=5$

$$\Rightarrow \cos(p,q)=\frac{(p|q)}{\|p\|\,\|q\|}=\frac{3}{\sqrt{55}}$$

3) $p(x)=1+2x-x^2 \Rightarrow \|p\|=\sqrt{9}=3$

4) $p(x)=2x,\ q(x)=1-x^2 \Rightarrow (p|q)=0$

$$\Rightarrow \mathrm{proj}_q p=\frac{(p|q)}{(q|q)}q=0$$

5) $(1|1)=3,\ (1|x)=0,\ (1|x^2)=2$

$(x|x)=2,\ (x|x^2)=0$

$(x^2|x^2)=2$

$\Rightarrow \{1,x,x^2\}$ non è ortonormale.

6) $F_1=1$

$$F_2=x-\frac{(x|F_1)}{(F_1|F_1)}F_1=x$$

$$F_3=x^2-\frac{(x^2|F_1)}{(F_1|F_1)}F_1-\frac{(x^2|F_2)}{(F_2|F_2)}F_2$$

$$=x^2-\frac{2}{3}$$

Normalizziamo

$$E_1=\frac{F_1}{\|F_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$E_2=\frac{F_2}{\|F_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$E_3=\frac{F_3}{\|F_3\|}=\sqrt{\frac{3}{2}}x^2-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Esercizio 3. *Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice* $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-k & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali A_k sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
2. *(2 punti) Per i valori di k trovati, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ composta di autovettori per A_k.*
3. *(1 punto) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali A_k sia ortogonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
4. *(2 punti) Per i valori di k trovati, determinare una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}A_kP$ sia una matrice diagonale.*

1) $P_{A_K}(x) = \det(x\mathbb{1}_3 - A_K) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -k \\ 0 & x-1 & 0 \\ k-2 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$

$$= (x-1)\left[(x-1)^2 - k(2-k)\right]$$

Per cui, $P_{A_K}(x) = 0$ se e solo se $x-1=0$ oppure $(x-1)^2 - k(2-K) = 0$. Ovvero se e solo se

•) $x = 1$

•) $(x-1)^2 = k(2-K) \iff x = 1 \pm \sqrt{k(2-k)}$

Otteniamo,

$$Sp(A_K) = \{1, 1+\sqrt{k(2-K)}, 1-\sqrt{k(2-K)}\}.$$

Questo spettro è reale se e solo se $k(2-k) \geq 0$ ovvero se e solo se $0 \leq k \leq 2$.

$$Sp_{\mathbb{R}}(A_K) = \begin{cases} \{1, 1+\sqrt{K(2-K)}, 1-\sqrt{K(2-K)}\} & \text{se } 0<K<2 \\ \{1\} & \text{se } K=0 \text{ o } k=2. \end{cases}$$

In particolare, $|Sp(A_K)|=3$ se $0<K<2$. Per cui A_K è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se $0<K<2$.

Studiamo $mg(1)$ se $K=0$ e se $K=2$.

$\boxed{k=0}$: $V_1(A_0)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}=<e_2,e_3> \Rightarrow$

$\Rightarrow mg(1)=2<3=ma(1)$.

$\boxed{k=2}$: $V_1(A_2)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=<e_1,e_2>$

$\Rightarrow mg(1)=2<3=ma(1)$.

Concludiamo che A_K è diag. su $\mathbb{R} \Leftrightarrow 0<K<2$.

2) Poniamo $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1+\sqrt{K(2-K)}$, $\lambda_3=1-\sqrt{K(2-K)}$

$V_{\lambda_1}(A_K)=<e_2>$, $V_{\lambda_2}(A_K)=<\begin{pmatrix}K\\0\\\lambda_2-1\end{pmatrix}>$, $V_{\lambda_3}(A_K)=<\begin{pmatrix}K\\0\\\lambda_3-1\end{pmatrix}>$

3) $K=1$

4) $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ è ortogonale e

$${}^tPA_1P=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 6x + 3y - 5z = 4 \end{cases} \qquad s : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

1. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche per* r *e cartesiane per* s*.*
2. *(1 punto) Discutere la posizione reciproca di* r *ed* s*.*
3. *(1 punto) Calcolare la distanza di* r *ed* s*.*
4. *(1 punto) Sia* π_r *il piano passante per* r *e per l'origine. Trovare equazioni parametriche e cartesiane per* π_r*.*
5. *(1 punto) Sia* π_s *il piano passante per* s *e per il punto* $P = (1, 1, 1)^t$*. Trovare equazioni parametriche e cartesiane per* π_s*.*
6. *(2 punti) Determinare* $\pi_r \cap \pi_s$*.*

1) $r: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$, $s: \begin{cases} 5x - 2z = -1 \\ 6x - 29y + 15z = -7 \end{cases}$

2) $P_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_sP_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_s = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{P_sP_r}, v_r, v_s\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r$ ed s sono sghembe.

3) $\operatorname{dist}(r, s) = \dfrac{|\overrightarrow{P_sP_r} \cdot (v_r \times v_s)|}{\|v_r \times v_s\|} = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{P_sP_r}, v_r, v_s\right)}{\|v_r \times v_s\|} = \dfrac{4}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\pi_r = \langle P_r, v_r \rangle : \; 2x - y - z = 0$

5) $\pi_s = P + \langle \overrightarrow{PP_s}, v_s \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\pi_s : \; x - 4y + 2z = -1$

6) $\Pi_r \cap \Pi_s$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Troviamole:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$$

Per cui $\Pi_2 \cap \Pi_s$ è una retta di eq. parametriche

$$\begin{pmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Esercizio 5. *Si considerino i seguenti dati:* $(-2, 0)$, $(-1, -1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$.

1. *(2 punti) Calcolare il polinomio di primo grado che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i dati.*
2. *(2 punti) Calcolare il polinomio di secondo grado che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i dati.*
3. *(2 punti) Rappresentare graficamente i dati ed i polinomi trovati.*
4. *(1 punto) Scrivere il codice MATLAB per risolvere i primi due punti.*

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ${}^tMM = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 18 \end{pmatrix}$, ${}^tMY = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

Il sistema ${}^tMMZ = {}^tMY$ ammette l'unica soluzione $Z = {}^t\left(\frac{9}{34}, \frac{8}{17}\right)$.

Per cui, il polinomio cercato è

$$P_1(x) = \frac{8}{17}x + \frac{9}{34}$$

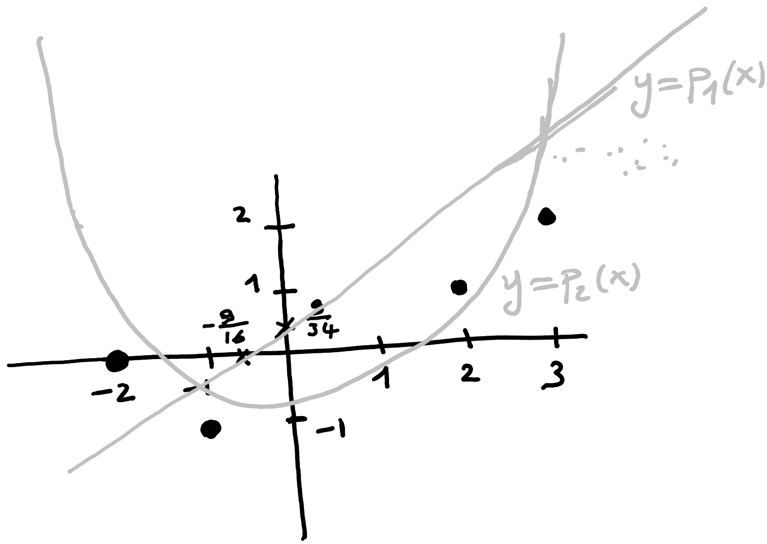
2) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, ${}^tMM = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 18 \\ 2 & 18 & 26 \\ 18 & 26 & 114 \end{pmatrix}$, ${}^tMY = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}$

Il sistema ${}^tMMZ = {}^tMY$ ammette l'unica sol.:

$Z = {}^t\left(-\frac{25}{34}, \frac{15}{68}, \frac{1}{4}\right)$.

Il polinomio cercato è $\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{68}x - \frac{25}{34}$

3)



4) $X = [-2, -1, 2, 3]$ $Y = [0, -1, 1, 2]$

$P_1 = \text{polyfit}(X, Y, 1)$

$P_2 = \text{polyfit}(X, Y, 2)$

<u>output</u>: $P_1 = \left[\frac{8}{17}, \frac{9}{34}\right]$

$P_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{15}{68}, -\frac{25}{34}\right]$