

Nome, Cognome e Matricola

---

Prova scritta di Geometria 1  
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

5 Giugno 2018

**Esercizio 1.** Sia  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione  $T((x, y, z)^t) = \begin{pmatrix} 2x + 3y - z \\ 4x - y + 2z \end{pmatrix}$ .

Si considerino i due insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = (1, 2, 3)^t, v_2 = (1, 1, 0)^t, v_3 = (1, 3, 5)^t\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{w_1 = (2, 3)^t, w_2 = (1, 2)^t\}.$$

1. (1 punto) Dimostrare che  $T$  è lineare.
2. (1 punto) Dimostrare che  $\mathcal{B}_1$  è una base di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B}_2$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ .
3. (1 punto) Sia  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'unica applicazione lineare tale che

$$L(w_1) = 3v_1 - 4v_2 + v_3, \quad L(w_2) = -2v_1 + v_3.$$

Determinare la matrice che rappresenta  $L$  nelle basi  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ .

4. (2 punti) Scrivere la matrice che rappresenta  $L \circ T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  nella base standard di  $\mathbb{R}^3$ .
5. (2 punti) Determinare una base per il nucleo ed una base per l'immagine di  $L \circ T$ .

5 Giugno 2018

Nome, Cognome e Matricola

---

**Esercizio 2.** Sia  $\mathbb{P}_2$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale a due (in una variabile). Si consideri la funzione  $(-, -) : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come segue

$$(p, q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

1. (1 punto) Dimostrare che  $(-, -)$  è un prodotto scalare su  $\mathbb{P}_2$ .
2. (1 punto) Nello spazio metrico  $(\mathbb{P}_2, (-, -))$ , calcolare il coseno dell'angolo tra  $p(x) = 1 - x + x^2$  e  $q(x) = 1 + x$ .
3. (1 punto) Nello spazio metrico  $(\mathbb{P}_2, (-, -))$ , calcolare la norma di  $p(x) = 1 + 2x - x^2$ .
4. (1 punto) Nello spazio metrico  $(\mathbb{P}_2, (-, -))$ , calcolare la proiezione ortogonale di  $p(x) = 2x$  sulla retta generata da  $q(x) = 1 - x^2$ .
5. (1 punto) Stabilire se  $\{1, x, x^2\}$  è una base ortonormale di  $(\mathbb{P}_2, (-, -))$ .
6. (2 punti) Trovare una base ortonormale  $\{E_1, E_2, E_3\}$  di  $(\mathbb{P}_2, (-, -))$  tale che  $\text{Span}\{E_1\} = \text{Span}\{1\}$  e  $\text{Span}\{E_1, E_2\} = \text{Span}\{1, x\}$ .

5 Giugno 2018

Nome, Cognome e Matricola

---

**Esercizio 3.** Per  $k \in \mathbb{R}$  si consideri la matrice  $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. (2 punti) Determinare i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali  $A_k$  sia diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .
2. (2 punti) Per i valori di  $k$  trovati, determinare una base di  $\mathbb{R}^3$  composta di autovettori per  $A_k$ .
3. (1 punto) Determinare i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali  $A_k$  sia ortogonalmente diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .
4. (2 punti) Per i valori di  $k$  trovati, determinare una matrice ortogonale  $P$  tale che  $P^{-1}A_kP$  sia una matrice diagonale.

5 Giugno 2018

Nome, Cognome e Matricola

---

**Esercizio 4.** Si considerino le seguenti due rette di  $\mathbb{R}^3$ :

$$r : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 6x + 3y - 5z = 4 \end{cases} \quad s : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

1. (1 punto) Trovare equazioni parametriche per  $r$  e cartesiane per  $s$ .
2. (1 punto) Discutere la posizione reciproca di  $r$  ed  $s$ .
3. (1 punto) Calcolare la distanza di  $r$  ed  $s$ .
4. (1 punto) Sia  $\pi_r$  il piano passante per  $r$  e per l'origine. Trovare equazioni parametriche e cartesiane per  $\pi_r$ .
5. (1 punto) Sia  $\pi_s$  il piano passante per  $s$  e per il punto  $P = (1, 1, 1)^t$ . Trovare equazioni parametriche e cartesiane per  $\pi_s$ .
6. (2 punti) Determinare  $\pi_r \cap \pi_s$ .



5 Giugno 2018

Nome, Cognome e Matricola

---

**Esercizio 5.** *Si considerino i seguenti dati:  $(-2, 0)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 2)$ .*

- 1. (2 punti) Calcolare il polinomio di primo grado che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i dati.*
- 2. (2 punti) Calcolare il polinomio di secondo grado che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i dati.*
- 3. (2 punti) Rappresentare graficamente i dati ed i polinomi trovati.*
- 4. (1 punto) Scrivere il codice MATLAB per risolvere i primi due punti.*

5 Giugno 2018

Nome, Cognome e Matricola

---