Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

12 Luglio 2018

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali* x_1, x_2, x_3*:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Verificare che il sistema non ammette soluzioni.*
2. *(3 punti) Utilizzando la decomposizione* QR*, determinare tutte le soluzioni approssimate del sistema.*
3. *(3 punti) Determinare tutte le soluzioni approssimate del sistema, senza utilizzare la decomposizione* QR*.*

Esercizio 2. *Si consideri la seguente matrice* 5×5*:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(4 punti) Dimostrare che* A *é invertibile, calcolandone il determinante.*
2. *(2 punti) Calcolare i cofattori* C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}.
3. *(1 punto) Determinare l'unica soluzione del sistema* $AX = e_1$.
4. *(1 punto) Sapendo che il polinomio caratteristico di* A *è*

$$p_A(x) = x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 2$$

determinare l'inversa di A *in funzione di* A.

Esercizio 3. *Su $\mathbb{R}^2$ si consideri la funzione bilineare $b_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $b_A(X, Y) = {}^tXAY$ dove* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Dimostrare che b_A definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.*
2. *(1 punto) Calcolare la norma di $e_1 = (1, 0)^t$ ed $e_2 = (0, 1)^t$ nello spazio metrico $(\mathbb{R}^2, b_A)$.*
3. *(2 punti) Calcolare il coseno dell'angolo formato da $e_1 = (1, 0)^t$ ed $e_2 = (0, 1)^t$ nello spazio metrico $(\mathbb{R}^2, b_A)$.*
4. *(2 punti) Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ composta di autovettori per A ed utilizzare tale base per trovare una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$.*
5. *(1 punto) Utilizzando lo sviluppo di Fourier, scrivere il vettore $v = (2, 4)^t$ come combinazione lineare degli elementi della base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 4. *Denotiamo con $\mathbb{P}_n$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale ad n a coefficienti reali. Si considerino i seguenti insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \{q_1(x) = 1 + x,\, q_2(x) = 1 - x\} \subset \mathbb{P}_1.$$

$$\mathcal{B}_2 = \{p_1(x) = 2 - x,\, p_2(x) = 1 + 2x,\, p_3(x) = 1 + x + x^2\} \subset \mathbb{P}_2,$$

1. *(2 punti) Dimostrare che $\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbb{P}_1$ e $\mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{P}_2$.*
2. *(1 punto) Sia $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ l'unica applicazione lineare tale che*

   $$T(q_1) = 2p_1 - p_2 + p_3, \quad T(q_2) = p_1 + p_2.$$

   Trovare la matrice A che rappresenta T nelle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1$.
3. *(2 punti) Trovare la matrice che rappresenta T nelle basi standard $\mathcal{C}_1 = \{1, x\} \subset \mathbb{P}_1$ e $\mathcal{C}_2 = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{P}_2$.*
4. *(1 punto) Dimostrare che T è iniettiva.*
5. *(1 punto) Trovare una base dell'immagine di T.*

Esercizio 5. *Calcolare l'area del triangolo del piano euclideo avente vertici* P*,* Q *ed* R *dove* $P = (2, 1)^t$*,* Q *è ottenuto ruotando* P *di un angolo di* $\pi/4$ *attorno all'origine ed* R *è il punto ottenuto riflettendo l'origine rispetto alla retta* r *passante per* P *e* Q*.*