Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

5 Settembre 2018

Esercizio 1. *Studiare il seqguente sistema lineare nelle variabili reali* x_1, x_2, x_3, x_4, *al variare del parametro reale* k*:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2kx_3 + (2k-2)x_4 & = & 2k^2 - 2k - 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - kx_3 + (k-1)x_4 & = & k^2 - k \\ 5x_1 + 5x_2 - 4kx_3 + (3k-3)x_4 & = & 3k^2 - 4k - 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. *Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ e centro $C = (1, 1)$.*

1. *(1 punto) Scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$.*
2. *(1 punto) Trovare tutti i punti di $\mathcal{C}$ che hanno coordinate intere.*
3. *(1 punto) Verificare che $P_1 = (2, 0)$ e $P_2 = (2, 2)$ appartengono a $\mathcal{C}$.*
4. *(1 punto) Sia r_1 la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto P_1. Trovare equazioni cartesiane e parametriche di r_1.*
5. *(1 punto) Sia r_2 la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto P_2. Trovare equazioni cartesiane e parametriche di r_2.*
6. *(1 punto) Trovare il punto $Q = r_1 \cap r_2$.*
7. *(1 punto) Sia Q' il punto ottenuto riflettendo Q rispetto alla retta passante per P_1 e P_2. Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2, Q'.*

Esercizio 3. *Si consideri la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ *ed il seguente sottoinsieme delle matrici* 2×2*:*

$$U = \{X \in Mat_{2\times 2} | \, AX = 0_{2\times 2}\} \subseteq Mat_{2\times 2}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* U *è un sottospazio vettoriale di* $Mat_{2\times 2}$*.*
2. *(2 punti) Trovare una base di* U*.*
3. *(1 punto) Scriviamo una matrice* $X \in Mat_{2\times 2}$ *come* $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$.
   Scrivere le equazioni che definiscono U *nelle variabili* x_1, x_2, x_3, x_4*.*
4. *(3 punti) Si consideri la struttura metrica su* $Mat_{2\times 2}$ *indotta dalla struttura metrica standard di* $\mathbb{R}^4$ *mediante l'identificazione*

   $$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)^t.$$

   Trovare la proiezione ortogonale su U *del vettore* $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice* 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calcolare il polinomio caratteristico di* A.
2. *Trovare una matrice invertibile* B *tale che* $B^{-1}AB$ *sia una matrice diagonale.*
3. *Calcolare la decima potenza di* A.

Esercizio 5. *Consideriamo la funzione* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *definita come segue:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che* T *é un'applicazione lineare suriettiva.*
2. *Scrivere la matrice che rappresenta* T *nelle basi standard di* $\mathbb{R}^4$ *ed* $\mathbb{R}^2$.
3. *Determinare una base* $\mathcal{B}$ *del nucleo di* T.
4. *Estendere la base* $\mathcal{B}$ *ad una base* $\mathcal{B}_1$ *di* $\mathbb{R}^4$.
5. *Scrivere la matrice che rappresenta* T *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *di* $\mathbb{R}^4$ *e la base* $\mathcal{B}_2 = \{(1,1)^t, (1,2)^t\}$ *di* $\mathbb{R}^2$.