Problema:

Studiare al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$ il seguente sistema lineare nelle cinque variabili $X_1, \cdots, X_5$:

$$\begin{cases} X_1 & & -2X_3 & +X_4 & & = & 1 \\ kX_1 & +X_2 & +(1-2k)X_3 & +kX_4 & +X_5 & = & 1 \\ X_1 & +kX_2 & +(k-2)X_3 & +(k^2-k+1)X_4 & +(2k)X_5 & = & k \end{cases}$$

Soluzione:

```
X=sym('x', [1 5]);
Y=sym('x',[1,5]);
syms k ;
```

La matrice dei coefficienti del sistema è

```
A=[1 0 -2 1 0;
   k 1 (1-2*k) k 1;
   1 k (k-2) k^2-k+1 2*k]
```

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1-2k & k & 1 \\ 1 & k & k-2 & k^2-k+1 & 2k \end{pmatrix}$$

Se k(k-1) è diverso da zero (ovvero se k è diverso sia da zero che da uno) allora A=LU dove

```
[L U]=lu(A)
```

L =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

U =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k & k \end{pmatrix}$$

Considerando la matrice dei termini noti

```
b=[1;1;k]
```

b =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

Il sistema LY=b ha come unica soluzione

```
Y=linsolve(L,b)
```

Y =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-k \\ k^2-1 \end{pmatrix}$$

Il sistema UX=Y ha come soluzione particolare

```
X0=linsolve(U,Y)
```

Warning: The system is rank-deficient. Solution is not unique.

X0 =

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ 1-k \\ 0 \\ \frac{k+1}{k} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed il sistema omogeneo associato UX=0 ha come soluzioni base

```
Z=null(A);
X1=Z(:,1)
```

X1 =

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
X2=Z(:,2)
```

X2 =

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k-1} \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{k-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni del sistema AX=b sono quindi

```
X0+X(3)*X1+X(5)*X2
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 2\,x_3 + \frac{x_5}{k-1} - \frac{1}{k} \\ 1 - x_3 - x_5 - k \\ x_3 \\ \frac{k+1}{k} - \frac{x_5}{k-1} \\ x_5 \end{pmatrix}$$

al variare di $x_3, x_5 \in \mathbf{R}$.

Se k=0 la matrice U, la matrice L e la matrice dei termini noti b sono rispettivamente

```
k=0;
A=[1 0 -2 1 0;
   k 1 (1-2*k) k 1;
   1 k (k-2) k^2-k+1 2*k];
[L U]=lu(A)
```

L =

```
     1     0     0
     0     1     0
     1     0     1
```

-

U =

```
     1     0    -2     1     0
     0     1     1     0     1
     0     0     0     0     0
```

-

```
b=[1;1;k]
```

```
b =
     1
     1
     0
```

•

Il sistema LY=b ha come unica soluzione

```
Y=linsolve(L,b)
```

```
Y =
     1
     1
    -1
```

•

ed il sistema UX=Y è quindi incompatibile, poichè l'ultima riga di U è zero mentre l'ultima riga di Y è non-zero.

Se k=1 la matrice U, la matrice L e la matrice dei termini noti b sono rispettivamente

```
k=1;
A=[1 0 -2 1 0;
   k 1 (1-2*k) k 1;
   1 k (k-2) k^2-k+1 2*k]
```

```
A =
     1     0    -2     1     0
     1     1    -1     1     1
     1     1    -1     1     2
```

•

```
[L U]=lu(A)
```

```
L =
     1     0     0
     1     1     0
     1     1     1
```

•

```
U =
     1     0    -2     1     0
     0     1     1     0     1
     0     0     0     0     1
```

•

```
b=[1;1;k]
```

```
b =
     1
     1
     1
```

•

Il sistema LY=b ammette l'unica soluzione

```
Y=linsolve(L,b)
```

```
Y =
     1
     0
     0
```

-

ed il sistema UX=Y ha la seguente soluzione particolare:

```
X0=sym(linsolve(U,Y))
```

X0 =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le soluzioni base del sistema omogeneo associato sono

```
Z=null(U,'r');
X1=Z(:,1)
```

```
X1 =
     2
    -1
     1
     0
     0
```

-

```
X2=Z(:,2)
```

```
X2 =
    -1
     0
     0
     1
     0
```

-

e le soluzioni del sistema UX=Y e quindi del sistema AX=b sono

```
X0+X(3)*X1+X(4)*X2
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 2\,x_3 - x_4 \\ \frac{1}{2} - x_3 \\ x_3 - \frac{1}{2} \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al variare di $x_2, x_4 \in \mathbf{R}$.

Qualcuno potrebbe aver trovato la soluzione particolare

```
X0=[1 0 0 0 0]'
```

```
X0 =
     1
     0
     0
     0
     0
```

-

e quindi aver trovato come soluzioni le matrici

```
X0+X(3)*X1+X(4)*X2
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 2\,x_3 - x_4 + 1 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che i due insiemi di soluzioni trovate sono uguali (dimostrarlo!).