Scheda numero 1

27 Dicembre 2017

Esercizio 1. Utilizzando la decomposizione QR, trovare il polinomio di grado due che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i seguenti dati:

$$(-3,1), \quad (-1,2), \quad (1,1), \quad (3,1), \quad (5,3).$$

Fare un disegno indicativo della soluzione.

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{12} \\ \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{5}{18} & -\frac{\sqrt{2}}{36} \\ \frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{2}}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

1. (3 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
2. (3 punti) Trovare una matrice ortogonale P tale che ${}^tPAP$ sia diagonale.
3. (1 punto) Calcolare $\lim_{n\to\infty} A^n$.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti punti del piano

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

1. (1 punto) Trovare l'equazione cartesiana delle retta r_1 passante per P_1 e per P_2.
2. (1 punto) Trovare l'equazione cartesiana delle retta r_2 passante per P_3 e per P_4.
3. (1 punto) Calcolare l'angolo tra r_1 ed r_2. Dedurre che r_1 ed r_2 non sono parallele.
4. (1 punto) Trovare il punto di intersezione P_0 tra r_1 ed r_2.
5. (2 punto) Sia P_5 la riflessione di P_1 rispetto alla retta r_2. Calcolare P_5.
6. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_0, P_1 e P_5.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
2. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
3. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2 - w_1, \quad f(v_3) = w_1 - w_2, \quad f(v_4) = w_2.$$

   Scrivere la matrice che rappresenta f nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$.
4. (1 punto) Calcolare base e dimensione del nucleo di f.
5. (1 punto) Calcolare base e dimensione dell'immagine di f.

Esercizio 5. Si consideri il seguente grafo orientato Γ su 4 vertici

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[loop right] \arrow[d] \\ 4 \arrow[loop left] & 3 \arrow[l] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

1. (1 punto) Si determini la matrice di adiacenza $A = A_\Gamma$ di Γ.
2. (2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico $c_A(x)$ di A. Dedurre che A è invertibile.
3. (2 punti) Calcolare A^2 ed A^3.
4. (2 punti) Calcolare l'inversa di A usando il teorema di Cayley-Hamilton.