Nome, Cognome e Matricola

Esercitazione di Geometria

27 Dicembre 2017

Esercizio 1. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *(4 punti) Trovare la decomposizione LU di A.*

2. *(3 punti) Risolvere il sistema $Ax = b$ dove $b = (1, 2, 1)^t$.*

Esercizio 2. *Si consideri la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia $A := {}^tBB$.

1. *(3 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di* A.
2. *(3 punti) Trovare una matrice ortogonale* P *tale che* ${}^tPAP$ *sia diagonale.*
3. *(1 punto) Stabilire se la matrice simmetrica* A *é definita positiva.*

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti punti del piano*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se i tre punti sono collineari.*
2. *(2 punti) In caso non siano collineari, trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per i tre punti.*
3. *(2 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3.*
4. *(2 punti) Trovare una base ortonormale del piano di giacitura di π ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.*

Esercizio 4. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

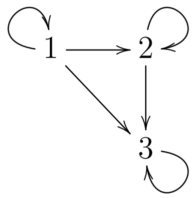
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
3. *(2 punti) Sia* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *l'unica applicazione lineare tale che*

   $$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2 - w_1, \quad f(v_3) = w_1 - w_2, \quad f(v_4) = w_2.$$

   Scrivere la matrice che rappresenta f *nelle basi canoniche di* $\mathbb{R}^4$ *ed* $\mathbb{R}^3$.
4. *(1 punto) Calcolare base e dimensione del nucleo di* f.
5. *(1 punto) Calcolare base e dimensione dell'immagine di* f.

Esercizio 5. *Si consideri il seguente grafo orientato* Γ *su* 3 *vertici*



1. *(1 punto) Si determini la matrice di adiacenza* $A = A_\Gamma$ *di* Γ.

2. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico* $c_A(x)$ *di* A. *Dedurre che* A *è invertibile.*

3. *(2 punti) Calcolare* A^2 *ed* A^3.

4. *(2 punti) Calcolare l'inversa di* A *usando il teorema di Cayley-Hamilton.*