Scheda numero 2

27 Dicembre 2017

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. (4 punti) Trovare la decomposizione LU di A.
2. (3 punti) Risolvere il sistema $Ax = b$ dove $b = (1, 2, 1)^t$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sia $A := {}^tBB$.

1. (3 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
2. (3 punti) Trovare una matrice ortogonale P tale che ${}^tPAP$ sia diagonale.
3. (1 punto) Stabilire se la matrice simmetrica A é definita positiva.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti punti del piano

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Stabilire se i tre punti sono collineari.
2. (2 punti) In caso non siano collineari, trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per i tre punti.
3. (2 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3.
4. (2 punti) Trovare una base ortonormale del piano di giacitura di π ed estenderla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

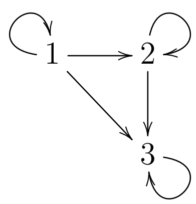
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
2. (1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
3. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

   $$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2 - w_1, \quad f(v_3) = w_1 - w_2, \quad f(v_4) = w_2.$$

   Scrivere la matrice che rappresenta f nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$.
4. (1 punto) Calcolare base e dimensione del nucleo di f.
5. (1 punto) Calcolare base e dimensione dell'immagine di f.

Esercizio 5. Si consideri il seguente grafo orientato Γ su 3 vertici



1. (1 punto) Si determini la matrice di adiacenza $A = A_\Gamma$ di Γ.
2. (2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico $c_A(x)$ di A. Dedurre che A è invertibile.
3. (2 punti) Calcolare A^2 ed A^3.
4. (2 punti) Calcolare l'inversa di A usando il teorema di Cayley-Hamilton.