Esercizio 1

Siano A e B due matrici equivalenti per righe. Poichè B è equivalente per righe alla sua forma a scala ridotta rref(B), ne segue che A è equivalente per righe a rref(B). Per il teorema di unicità della forma a scala ridotta di una matrice, otteniamo rref(A)=rref(B). Per cui rref(A) ed rref(B) hanno lo stesso numero di 1-dominanti, ovvero lo stesso rango.

Esercizio 2

Sia E un sistema di equazioni lineari con matrice dei coefficienti A e matrice dei termini noti b. Sia S=[R d] la forma a scala ridotta della matrice completa T=[A b] di E. Sia E' il sistema avente matrice completa S. Poichè T ed S sono equivalenti per righe i due sistemi E ed E' sono equivalenti. Ci sono due possibilità: 1) d è una colonna dominante, 2) d non è una colonna dominante. Se d è una colonna dominante l'ultima equazione (non-nulla) di E' è della forma 0x1+0x2+..+0xn=1 e quindi non ammette soluzioni; ne segue che se d è dominante, E' non è compatibile. Se invece d non è dominante, allora E' è risolubile. Abbiamo quindi dimostrato che E' è compatibile se e solo se d non è dominante. Notiamo che rg(S)=rg(R)+1 se d è dominante e rg(S)=rg(R) se d non è dominante. Poichè rg(T)=rg(S) per definizione, possiamo riformulare quanto detto come segue:

E è compatibile se e solo se rg(T)=rg(R).

Per concludere basta osservare che rg(A)=rg(R).

Esercizio 3

Per la regola di giuntura, il sistema associato alla rete è

```
f=sym('f',[1,5]);
eqn1= f(3)+40==f(1)+f(4)
```

eqn1 = $f_3 + 40 = f_1 + f_4$

```
eqn2= f(1)+f(2)==50
```

eqn2 = $f_1 + f_2 = 50$

```
eqn3= 60==f(2)+f(3)+f(5)
```

eqn3 = $60 = f_2 + f_3 + f_5$

```
eqn4= f(4)+f(5)==50
```

eqn4 = $f_4 + f_5 = 50$

La matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti sono i seguenti

```
[A b]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3,eqn4,f)
```

A =

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} -40 \\ 50 \\ -60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

La matrice completa del sistema è quindi

```
T=[A b]
```

T =

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -40 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma a scala ridotta della matrice completa

```
S=rref(T)
```

S =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'ultima colonna non è un 1-dominante e quindi il sistema è compatibile.

Una soluzione particolare del sistema è

```
X0=linsolve(A,b)
```

```
Warning: Solution is not unique because the system is rank-deficient.
X0 =
```

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 60 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni base del sistema omogeneo associato sono

```
X=null(A)
```

```
X =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
X1=X(:,1)
```

```
X1 =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
X2=X(:,2)
```

```
X2 =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono tutte della forma X0+ f3 X1+f5 X2

```
X0+f(3)*X1+f(5)*X2
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} f_3 + f_5 - 10 \\ 60 - f_5 - f_3 \\ f_3 \\ 50 - f_5 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 (versione 1: in cui da C escono due frecce)

Per la regola di giuntura, il sistema associato alla rete è

```
f=sym('f',[1,5]);
eqn1= f(5)+50==f(1)
```

eqn1 = $f_5 + 50 = f_1$

```
eqn2= f(1)==f(2)+30
```

eqn2 = $f_1 = f_2 + 30$

```
eqn3= f(2)==f(3)+40
```

eqn3 = $f_2 = f_3 + 40$

```
eqn4= f(3)==f(4)+25
```

eqn4 = $f_3 = f_4 + 25$

```
eqn5= f(4)==f(5)+35
```

eqn5 = $f_4 = f_5 + 35$

La matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti sono i seguenti

```
[A b]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3,eqn4,eqn5,f)
```

A =

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} -50 \\ 30 \\ 40 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

La matrice completa del sistema è quindi

```
T=[A b]
```

```
T =
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -50 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma a scala ridotta della matrice completa

```
S=rref(T)
```

```
S =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato cha l'ultima colonna è un 1-dominante, sappiamo che il sistema è incompatibile. Ci si poteva aspettare questo risultato fin dall'inizio, poichè in questo modello entrano 50 macchine all'ora ma ne escono 130!

Per scrupolo: proviamo a chiedere a MATLAB di trovare una soluzione...

```
X0=linsolve(A,b)
```

```
Warning: The system is inconsistent. Solution does not exist.
X0 =
```

$$\begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 (versione 2: in cui da C esce una sola freccia)

Per la regola di giuntura, il sistema associato alla rete è

```
f=sym('f',[1,5])
```

f = $\left(f_1 \;\; f_2 \;\; f_3 \;\; f_4 \;\; f_5\right)$

```
eqn1= f(5)+50==f(1)
```

eqn1 = $f_5 + 50 = f_1$

```
eqn2= f(1)==f(2)+30
```

eqn2 = $f_1 = f_2 + 30$

```
eqn3= f(2)+40==f(3)
```

eqn3 = $f_2 + 40 = f_3$

```
eqn4= f(3)==f(4)+25
```

eqn4 = $f_3 = f_4 + 25$

```
eqn5= f(4)==f(5)+35
```

eqn5 = $f_4 = f_5 + 35$

La matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti sono i seguenti

```
[A b]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3,eqn4,eqn5,f)
```

A =

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} -50 \\ 30 \\ -40 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

La matrice completa del sistema è quindi

```
T=[A b]
```

T =

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -50 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma a scala ridotta della matrice completa

```
S=rref(T)
```

S =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'ultima colonna non è un 1-dominante e quindi il sistema è compatibile. Inoltre rg(A)=rag(A b)=4 quindi ci aspettiamo che le soluzioni dipendono da 1=5-4 parametro.

Cerchiamo una soluzione del sistema:

```
X0=linsolve(A,b)
```

Warning: Solution is not unique because the system is rank-deficient.

X0 =

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 60 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo soluzioni base del sistema omogeneo associato

```
X1=null(A)
```

X1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono tutte sole le matrici colonna della forma X0+f5 X1

```
X0+f(5)*X1
```

ans =

$$\begin{pmatrix} f_5 + 50 \\ f_5 + 20 \\ f_5 + 60 \\ f_5 + 35 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5

Per la regola di giunzione, nei due punti di giunzione le intensità di corrente devono soddisfare le seguenti equazioni

```
I=sym('I',[1,3]);
eqn1= I(2)==I(3)+I(1)
```

eqn1 = $I_2 = I_1 + I_3$

```
eqn2= I(1)+I(3)==I(2)
```

eqn2 = $I_1 + I_3 = I_2$

Orientiamo le due maglie in senso orario. Per la regola delle maglie e la legge di Ohm, le intensità di corrente devono soddisfare alle seguenti equazioni

```
eqn3= 5==5*I(1)+10*I(2)
```

eqn3 = $5 = 5\,I_1 + 10\,I_2$

```
eqn4= -10==-5*I(3)-10*I(2)
```

eqn4 = $-10 = -10\,I_2 - 5\,I_3$

La matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti b del sistema così ottenuto sono date da

```
Sys=[eqn1,eqn3,eqn4];
[A b]=equationsToMatrix(Sys)
```

A =

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

La matrice completa del sistema è quindi

```
T=[A b]
```

T =

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & -10 & 0 & -5 \\ 0 & 10 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma a scala ridotta della matrice completa del sistema

```
S=rref(T)
```

S =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'ultima colonna non è un 1-dominante, e quindi il sistema è compatibile. Notiamo inoltre che rg(A)=3, e quindi le soluzioni dipendono da 3-3=0 parametri, ovvero c'è un'unica soluzione.

```
X0=linsolve(A,b)
```

X0 =

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Esercizio 6

Per la regola di giunzione, nei quattro punti di giunzione le intensità di corrente devono soddisfare le seguenti equazioni

```
I=sym('I',[1,6]);
eqn1= I(1)==I(3)+I(4)
```

eqn1 = $I_1 = I_3 + I_4$

```
eqn2= I(4)==I(2)+I(6)
```

eqn2 = $I_4 = I_2 + I_6$

```
eqn3= I(2)+I(3)==I(5)
```

eqn3 = $I_2 + I_3 = I_5$

```
eqn4= I(5)+I(6)==I(1)
```

eqn4 = $I_5 + I_6 = I_1$

Orientiamo le tre maglie in senso anti-orario. Per la regola delle maglie e la legge di Ohm, le intensità di corrente devono soddisfare alle seguenti equazioni

```
eqn5= -10==10*(I(6)-I(5))
```

eqn5 = $-10 = 10\, I_6 - 10\, I_5$

```
eqn6= 20==10*(I(3)+I(5))
```

eqn6 = $20 = 10\, I_3 + 10\, I_5$

```
eqn7= 10==10*(-I(3)+I(4))
```

eqn7 = $10 = 10\, I_4 - 10\, I_3$

La matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti b del sistema così ottenuto sono date da

```
Sys=[eqn1,eqn2,eqn3,eqn4,eqn5,eqn6,eqn7];
```

```
[A b]=equationsToMatrix(Sys)
```

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix}$$

La matrice completa del sistema è quindi

```
T=[A b]
```

T =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -10 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma a scala ridotta della matrice completa del sistema

```
S=rref(T)
```

S =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'ultima colonna non è un 1-dominante, e quindi il sistema è compatibile. Notiamo inoltre che rg(A)=6, e quindi le soluzioni dipendono da 6-6=0 parametri, ovvero c'è un'unica soluzione.

```
X0=linsolve(A,b)
```

X0 =

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 7

Il primo sistema è

```
x=sym('x',[1,5]);
eqn1= 3*x(1)-3*x(2)+2*x(3)+x(4)-6*x(5)==-1
```

eqn1 = $3\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 - 6\,x_5 = -1$

```
eqn2= 2*x(1)-2*x(2)-4*x(3)+6*x(4)+7*x(5)==5
```

eqn2 = $2\,x_1 - 2\,x_2 - 4\,x_3 + 6\,x_4 + 7\,x_5 = 5$

```
eqn3= 5*x(1)-5*x(2)-3*x(3)+8*x(4)+4*x(5)==6
```

eqn3 = $5\,x_1 - 5\,x_2 - 3\,x_3 + 8\,x_4 + 4\,x_5 = 6$

La matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti b di questo sistema è dato da

```
[A b]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3)
```

A =

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & -2 & -4 & 6 & 7 \\ 5 & -5 & -3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

E quindi la matrice completa del sistema è

```
T=[A b]
```

T =

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 1 & -6 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & -5 & -3 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma a scala ridotta S della matrice completa T del sistema

```
S=rref(T)
```

S =

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui deduciamo che il rango(T)=rango(A)=3 per cui il sistema è compatibile e le soluzioni dipendono da 5-3=2 parametri. Le variabili dominanti sono x1, x3 ed x5, mentre le variabili libere (ovvero i parametri) sono x2 ed x4.

Troviamo una soluzione del sistema

```
X0=linsolve(A,b)
```

Warning: The system is rank-deficient. Solution is not unique.

X0 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e le soluzioni-base del sistema omogeneo associato

```
X=null(A)
```

X =

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
X1=X(:,1)
```

X1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
X2=X(:,2)
```

X2 =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono tutte e sole le matrici colonne della forma X0+x2 X1+ x4 X2

```
X0+x(2)*X1+x(4)*X2
```

ans =

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_4 + 1 \\ x_2 \\ x_4 + 1 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7

Il secondo sistema è

```
syms x y z;
eqn1= 2*x+y-z==0
```

eqn1 = $2\,x + y - z = 0$

```
eqn2= x-y-z==1
```

eqn2 = $x - y - z = 1$

```
eqn3= 2*x+z==1
```

eqn3 = $2\,x + z = 1$

```
eqn4= sqrt(2)*x+3*y-z==1
```

eqn4 = $3\,y - z + \sqrt{2}\,x = 1$

La matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti b di questo sistema è dato da

```
[A b]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3,eqn4)
```

A =

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

E quindi la matrice completa del sistema è

```
T=[A b]
```

T =

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Troviamo la forma a scala ridotta S della matrice completa T del sistema

```
S=rref(T)
```

S =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui deduciamo che il rango(T)=4 ed il rango(A)=3 per cui il sistema non è compatibile (l'ultima colonna di S è dominante).

Chiediamo, ingenuamente, a MATLAB di calcolare una soluzione...

```
X0=linsolve(A,b);
```

Warning: The system is inconsistent. Solution does not exist.

Esercizio 8

Il primo sistema è

```
x=sym('x',[1,4]);
syms k;
eqn1= 2*x(1)+2*x(2)-k*x(3)+(k-1)*x(4)==k^2-k
```

eqn1 = $2\,x_1 + 2\,x_2 - k\,x_3 + x_4\,\left(k-1\right) = k^2 - k$

```
eqn2= 3*x(1)+3*x(2)-2*k*x(3)+(2*k-2)*x(4)==2*k^2-2*k-1
```

eqn2 = $3\,x_1 + 3\,x_2 + x_4\,\left(2\,k-2\right) - 2\,k\,x_3 = 2\,k^2 - 2\,k - 1$

```
eqn3= 5*x(1)+5*x(2)-4*k*x(3)+(3*k-3)*x(4)==3*k^2-4*k-2
```

eqn3 = $5\,x_1 + 5\,x_2 + x_4\,\left(3\,k-3\right) - 4\,k\,x_3 = 3\,k^2 - 4\,k - 2$

La matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti b di questo sistema è dato da

```
[A(k) b(k)]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3, x)
```

A(k) =

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -k & k-1 \\ 3 & 3 & -2k & 2k-2 \\ 5 & 5 & -4k & 3k-3 \end{pmatrix}$$

b(k) =

$$\begin{pmatrix} k^2-k \\ 2k^2-2k-1 \\ 3k^2-4k-2 \end{pmatrix}$$

E quindi la matrice completa del sistema è

```
T(k)=[A(k) b(k)]
```

T(k) =

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -k & k-1 & k^2-k \\ 3 & 3 & -2k & 2k-2 & 2k^2-2k-1 \\ 5 & 5 & -4k & 3k-3 & 3k^2-4k-2 \end{pmatrix}$$

Se k è diverso sia da zero che da uno, la forma a scala ridotta S della matrice completa T del sistema è

```
S=rref(T(k))
```

S =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{k+1}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Da cui deduciamo che il rango(T)=rango(A)=3 per cui il sistema è compatibile e le soluzioni dipendono da 4-3=1 parametro. Le variabili dominanti sono x1, x3 ed x4, mentre la variabile libera (ovvero il parametro) è x2.

Troviamo una soluzione del sistema

```
X0=linsolve(A(k),b(k))
```

Warning: The system is rank-deficient. Solution is not unique.
X0 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k+1}{k} \\ k+1 \end{pmatrix}$$

e le soluzioni-base del sistema omogeneo associato

```
X1=null(A)
```

```
X1(k) =
```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono tutte e sole le matrici colonne della forma X0+x2 X1

```
X0+x(2)*X1
```

```
ans(k) =
```

$$\begin{pmatrix} 1-x_2 \\ x_2 \\ \frac{k+1}{k} \\ k+1 \end{pmatrix}$$

Se k=0 la forma a scala ridotta di T=T(0) è

```
S=rref(T(0))
```

```
S =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che l'ultima colonna è dominante, il sistema non ammette soluzioni per k=0.

Se k=1, la forma a scala ridotta di T=T(1) è

```
S=rref(T(1))
```

```
S =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che il sistema è compatibile e le soluzioni dipendono da 4-2=2 parametri. Le variabili dominanti sono x1 ed x3, e le variabili libere (ovvero i parametri) sono x2 ed x4.

Cerchiamo una soluzione del sistema

```
X0=linsolve(A(1), b(1))
```

```
Warning: The system is rank-deficient. Solution is not unique.
X0 =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e le soluzioni base del sistema omogeneo associato

```
X=null(A(1));
X1=X(:,1)
```

```
X1 =
```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
X2=X(:,2)
```

```
X2 =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono tutte e solo combinazioni lineari della forma X0+x2 X1+x4 X2

```
X0+x(2)*X1+x(4)*X2
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \\ 2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8

Il secondo sistema è dato da

```
syms x y z k;
eqn1= x+(k-1)*y+z==1
```

eqn1 = $x + z + y\,(k-1) = 1$

```
eqn2= 2*x+k*y+k*z==k
```

eqn2 = $2\,x + k\,y + k\,z = k$

```
eqn3= k*x+2*y+(2*k-2)*z==4-k
```

eqn3 = $2\,y + z\,(2\,k-2) + k\,x = 4-k$

La matrice dei coefficenti A(k) e la matrice dei termini noti b(k) sono date da

```
[A(k), b(k)]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3, x, y,z)
```

A(k) =

$$\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 2 & k & k \\ k & 2 & 2\,k-2 \end{pmatrix}$$

b(k) =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 4-k \end{pmatrix}$$

e la matrice completa T(k) è data da

```
T(k)=[A(k) b(k)]
```

T(k) =

$$\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 & 1 \\ 2 & k & k & k \\ k & 2 & 2\,k-2 & 4-k \end{pmatrix}$$

Riducendo a scala la matrice completa T(k) del sistema ci accorgiamo che ci sono 4 casi da discutere separatamente: 1) k=0, 2) k=1, 3) k=2, 4) tutti gli altri casi

Caso 1: k=0. In questo caso la matrice completa del sistema è

```
T(0)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

La forma a scala ridotta di questa matrice è

```
rref(T(0))
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che l'ultima colonna è dominante, deduciamo che il sistema non ammette soluzioni per k=0

Caso 2: k=1. In questo caso la matrice completa del sistema è

```
T(1)
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e la sua forma a scala ridotta è

```
rref(T(1))
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che il sistema ammette l'unica soluzione

```
linsolve(A(1),b(1))
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Caso 3: k=2. In questo caso la matrice completa del sistema è

```
T(2)
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

la cui forma a scala ridotta è

```
rref(T(2))
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che il sistema è compatibile e le soluzioni dipendono dai due parametri x2 ed x3. Per trovare le soluzioni cerchiamo una soluzione particolare

```
X0=linsolve(A(2),b(2))
```

```
Warning: The system is rank-deficient. Solution is not unique.
X0 =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e le soluzioni base del sistema omogeneo associato

```
X=null(A(2));
X1=X(:,1)
```

```
X1 =
```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
X2=X(:,2)
```

```
X2 =
```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono tutte e sole le combinazioni lineari della forma X0+x2 X1+ x3 X2

```
X0+y*X1+z*X2
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 - z - y \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Caso 4: k diverso da 0,1 e 2. In questo caso la forma scala ridotta di T(k) è

```
rref(T(k))
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{k} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{k+3}{k} \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che il sistema lineare ammette l'unica soluzione

```
linsolve(A(k),b(k))
```

ans =

$$\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{k} \\ \frac{k+3}{k} \end{pmatrix}$$