Esercizi Di Geometria

SETTIMANA 3
(9 – 15 Ottobre 2017)

Esercizio 1. Trovare condizioni su a, b, c, x, y e z affinchè le seguenti matrici siano nilpotenti

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

e calcolare le corrispondenti matrici esponenziali $e^A = exp(A)$ ed $e^B = exp(B)$. Verificare il risultato con MATLAB (il comando è `expm`).

Esercizio 2. Siano A e B due matrici 2–nilpotenti che commutano tra loro. Dimostrare che $A + B$ è 2–nilpotente se e solo se $AB = 0$.

Esercizio 3. Qualora sia definita, calcolare l'esponenziale di ognuna delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Scrivere tutti i grafi orientati (senza lati multipli) Γ aventi 2 vertici e tali che la matrice di adiacenza A_Γ sia nilpotente.

Esercizio 5. Scrivere tutti i grafi orientati (senza lati multipli) Γ aventi 3 vertici e tali che la matrice di adiacenza A_Γ sia nilpotente.

Esercizio 6. Una matrice quadrata A si dice *idempotente* se esiste k tale che $A^k = \mathbf{1}$. Calcolare tutte le potenze della matrice di adiacenza del 4-ciclo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\
4 \arrow[u] & 3 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

ossevando che tale matrice è 4–idempotente.

Esercizio 7. Calcolare la quinta potenza della matrice di adiacenza del seguente grafo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left] \arrow[rr] & & 2 \arrow[rr] \arrow[dl] & & 3 \arrow[loop right] \\
& 4 \arrow[ul] \arrow[rr] & & 5 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Verificare il risultato con MATLAB.

Esercizio 8. Stabilre se ognuna delle seguenti matrici sia invertibile, e nel caso lo sia, calcolare l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Discutere per quali $h \in \mathbb{R}$ la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & h \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è invertibile, e calcolarne quando possibile l'inversa.

Esercizio 10. Dire se il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = b_2 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = b_3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + x_4 = b_4 \end{cases}$$

ammette soluzione per ogni $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$. In tal caso calcolare la soluzione nel caso in cui $b = (5, 5, 10, 12)^t$.

Esercizio 11. Dire se il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = b_2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = b_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = b_4 \end{cases}$$

ammette soluzione per ogni $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$. In tal caso calcolare la soluzione nel caso in cui $b = (0, 1, 2, 3)^t$.

Esercizio 12. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Verificare che

$$A^2 - 4A - \mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_{2,2}$$

ed usare questa espressione per calcolare A^{-1}.