Esercizio 1

Affinchè la matrice A sia nilpotente è necessario che non sia invertibile ovvero che det(A)=ac=0, quindi a=0 oppure c=0. Se A=0 è la matrice nulla, allora è nilpotente. Per cui assumiamo che non lo sia.

```
syms a b c
A=[a b; 0 c]
```

A =

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Supponiamo c=0

```
A=[a b; 0 0]
```

A =

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora A^2 è

```
A^2
```

ans =

$$\begin{pmatrix} a^2 & a\,b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale ad aA

```
A^2==a*A
```

ans =

$$\begin{pmatrix} a^2 = a^2 & a\,b = a\,b \\ 0 = 0 & 0 = 0 \end{pmatrix}$$

ne segue che $A^n = a^{n-1}A$ per ogni $n \geq 1$. Poichè $A \neq 0$ affinchè A sia nilpotente è necessario che esista un n tale che $a^n = 0$ ovvero a=0. Per cui se c=0 anche a deve essere zero.

Supponiamo che a=0. Allora

```
A=[0 b; 0 c]
```

A =

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

e quindi

```
A^2
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & b\,c \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

ovvero $A^2 = \mathrm{cA}$. Ne segue che $A^n = c^{n-1}\,A$ per cui affinchè A sia nilpotente è necessasrio che $c^n = 0$ ovvero che c=0. Concludiamo che se a=0 allora c=0. In conclusione la matrice A è nilpotente se e solo se a=c=0. In questo caso, se $b \neq 0$A è 2-nilpotente, e se b=0 A=0.

Se A=0, $e^A = 1$. Se $A \neq 0, \quad e^A = 1 + A$ ovvero

```
A=[0 b; 0 0]
```

```
A =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
expm(A)
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo adesso la matrice B

```
syms x y z
B=[x y; 1 z]
```

```
B =
```

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

affinchè B sia nilpotente è necessario che det(B)=xz-y=0 ovvero che y=xz. Per cui B deve essere della forma

```
B=[x x*z; 1 z]
```

```
B =
```

$$\begin{pmatrix} x & x\,z \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

calcoliamo il quadrato di B

```
B^2
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} x^2 + z\,x & x^2\,z + x\,z^2 \\ x + z & z^2 + x\,z \end{pmatrix}$$

e notiamo che $B^2 = (x+z)B$. Ne segue che $B^n = (x+z)^{n-1}B$. Quindi B è nilpotente se e solo se x+z=0 ovvero se e solo se B è della forma

```
B=[x -x^2; 1 -x]
```

B =

$$\begin{pmatrix} x & -x^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix}$$

in tal caso notiamo che B è 2-nilpotente.

```
B^2
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice esponenziale e^B è $1 + B$

```
expm(B)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} x + 1 & -x^2 \\ 1 & 1 - x \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Si ha $(A+B)^2 = A^2 + \mathrm{AB} + \mathrm{BA} + B^2 = 2\,\mathrm{AB}$ per cui A+B è 2-nilpotente se e solo se AB=0.

Esercizio 3

Consideriamo la matrice

```
B=[0 1 0; 0 0 1; 0 0 0]
```

```
B =
     0     1     0
     0     0     1
     0     0     0
```

essa è 3-nilpotente

```
B^2
```

```
ans =
     0     0     1
     0     0     0
     0     0     0
```

```
B^3
```

```
ans =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

-

per cui $e^B = 1 + B + \frac{1}{2}B^2$ ovvero

```
sym(expm(B))
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice

```
B=[0 1 0; 1 0 1; 0 0 0]
```

```
B =
     0     1     0
     1     0     1
     0     0     0
```

-

si ha:

```
B^2
```

```
ans =
     1     0     1
     0     1     0
     0     0     0
```

-

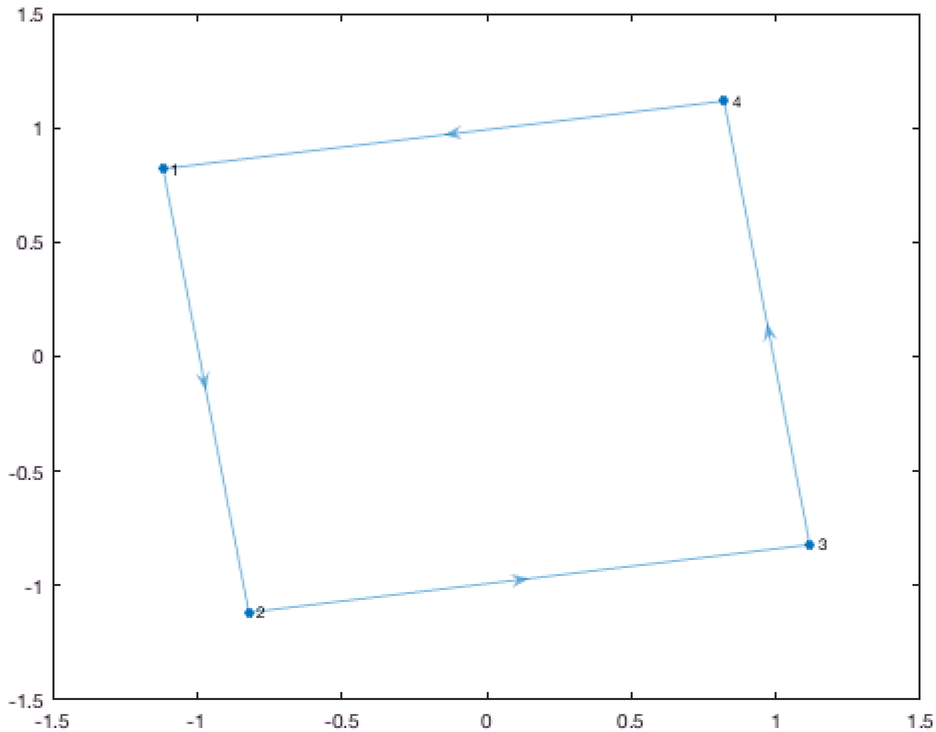
```
B^3==B
```

```
ans = 3×3 logical array
   1   1   1
   1   1   1
   1   1   1
```

ne segue che B non è nilpotente; abbiamo definito l'esponenziale solo di matrici nilpotenti (per quanto non sarebbe difficile definirla in tutti i casi) per cui e^B non è definita.

Esercizio 6

```
s=[1 2 3 4];
t=[2 3 4 1];
G=digraph(s,t,4);
plot(G)
```




```
A=full(adjacency(G))
```

```
A =
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0
```

-

```
A^2
```

```
ans =
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0
     0     1     0     0
```

-

```
A^3
```

```
ans =
     0     0     0     1
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
```

-

```
A^4
```

```
ans =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

-

Esercizio 7

```
s=[1 1 2 2 3 4 4 5]
```

```
s =
     1     1     2     2     3     4     4     5
```

-

```
t=[1 2 3 4 3 1 5 2]
```

```
t =
     1     2     3     4     3     1     5     2
```

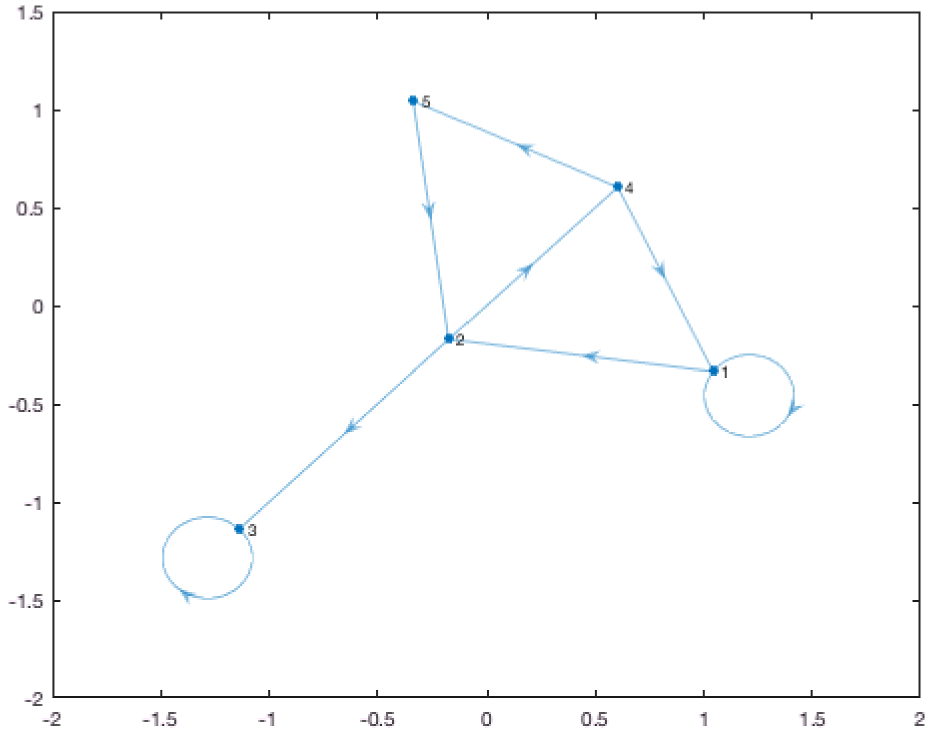
-

```
G=digraph(s,t,5)
```

```
G =
  digraph with properties:

    Edges: [8×2 table]
    Nodes: [5×0 table]
```

```
plot(G)
```




```
A=full(adjacency(G))
```

```
A =
     1     1     0     0     0
     0     0     1     1     0
     0     0     1     0     0
     1     0     0     0     1
     0     1     0     0     0
```

•

```
A^5
```

```
ans =
     4     4     6     3     1
     3     1     4     1     2
     0     0     1     0     0
     4     5     4     1     1
     1     1     3     2     0
```

•

Esercizio 8

```
A=[1 0 0 0;
   0 1 1 -1;
   1 1 -1 1;
   0 2 0 -1]
```

```
A =
     1     0     0     0
     0     1     1    -1
     1     1    -1     1
     0     2     0    -1
```

-

l'inversa è

```
sym(A^-1)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 9

```
syms h
A=[h 1 0;
    1 h h;
    0 1 2]
```

A =

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & h \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se $h^2 - 2 \neq 0$ A è invertibile e l'inversa è

```
A^-1
```

ans =

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & -\frac{2}{h^2-2} & \sigma_1 \\ -\frac{2}{h^2-2} & \frac{2h}{h^2-2} & -\frac{h^2}{h^2-2} \\ \frac{1}{h^2-2} & -\sigma_1 & \frac{h^2-1}{h^2-2} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{h}{h^2-2}$$

se $h = \sqrt{2}$ allora

```
h=sym(sqrt(2))
```

h = $\sqrt{2}$

```
A=sym([h 1 0;
   1 h h;
    0 1 2])
```

A =

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A^-1
```

ans = FAIL

A non è invertibile. Se $h = -\sqrt{2}$ allora

```
h=-sym(sqrt(2))
```

h = $-\sqrt{2}$

```
A=sym([h 1 0;
   1 h h;
    0 1 2])
```

A =

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A^-1
```

ans = FAIL

A non è invertibile.

Esercizio 10

```
A=[1 3 2 0 ;
   2 5 4 1 ;
   1 5 4 -1;
   3 10 8 1]
```

A =

```
     1     3     2     0
     2     5     4     1
     1     5     4    -1
     3    10     8     1
```

-

```
inv(sym(A))
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11

```
A=[1 1 -1 1;
   2 1 -1 2;
   1 0 1 1;
   1 -1 2 -1]
```

```
A =
     1     1    -1     1
     2     1    -1     2
     1     0     1     1
     1    -1     2    -1
```

```
B=inv(sym(A))
```

B =

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
syms b1 b2 b3 b4
b=[b1; b2; b3; b4]
```

b =

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

```
B*b
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{b_2}{2} - \frac{b_3}{2} + \frac{b_4}{2} \\ 3\,b_1 - 2\,b_2 + b_3 \\ b_1 - b_2 + b_3 \\ \frac{b_2}{2} - b_1 + \frac{b_3}{2} - \frac{b_4}{2} \end{pmatrix}$$

in particolare per b=(0,1,2,3) la soluzione è

```
b=[0,1,2,3]'
```

```
b =
     0
     1
     2
     3
```

-

```
B*b
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12

```
A=[1 2; 2 3]
```

```
A =
     1     2
     2     3
```

-

```
A^2-4*A-eye(2)
```

```
ans =
     0     0
     0     0
```

-

per cui $A^2 - 4A - 1_2 = 0$ da cui si ottiene $A\left(A - 4\,1_2\right) = 1_2$ per cui A è invertibile ed ha inversa $A^{-1} = A - 4\,1_2$. Verifichiamo

```
A-4*eye(2)
```

```
ans =
    -3     2
     2    -1
```

-

```
A^-1
```

```
ans =
    -3     2
     2    -1
```

-