Esercizi Di Geometria

SETTIMANA 4
(16 – 22 Ottobre 2017)

Esercizio 1. Utilizzando l'algoritmo LU (eventualmente con scambi di riga), studiare il seguente sistema lineare nella incognite x, y e z al variare dei parametri reali h e k:

$$\begin{cases} (k+1)x + y + z &= 1 \\ x + (k+1)y + z &= h \\ x + y + (k+1)z &= h^2 \end{cases}$$

Verificare le soluzioni con MATLAB. (Il comando per trovare A=LU è [L,U]=lu(A).)

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice quadrata 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per ognuna delle seguenti matrici elementari E calcolare i prodotti EA ed AE e descrivere a parole l'effetto della moltiplicazione sulla matrice A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Consideriamo le seguenti matrici A e C di taglia 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Verificare che le due matrici A e C siano equivalenti per righe e trovare una matrice invertibile B tale che $A = BC$.

Esercizio 4. Due matrici si dicono *equivalenti per colonne* se l'una è ottenuta dall'altra mediante successive operazioni elementari sulle colonne. Verificare che le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

sono equivalenti per colonne. Trovare una matrice invertibile C tale che $A = BC$.

Esercizio 5. Trovare una decomposizione LU della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e scrivere L come prodotto di matrici elementari.

Esercizio 6. Trovare una decomposizione LU della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

e scrivere L come prodotto di matrici elementari.

Esercizio 7. Trovare una decomposizione LU della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -2 & 9 \\ -2 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

e scrivere L come prodotto di matrici elementari.

Esercizio 8. Utilizzando l'algoritmo LU trovare le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5z & = & 2 \\ -4x - 5y + 7z & = & -4 \\ 8x + 6y - 8z & = & 6 \end{cases}$$

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il rango r di A e trovare due matrici invertibili T e V tali che $TAV = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 10. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il rango r di A e trovare due matrici invertibili T e V tali che $TAV = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.