

Esercizi Di Geometria

SETTIMANA 5
(23 – 29 Ottobre 2017)

Ecco degli esercizi che ho preso dal libro di testo che utilizzavo per le mie lezioni di due anni fa. Sono esercizi di routine che servono per prendere la mano con i concetti introdotti in questa settimana. Cercate di farne almeno una decina, di cui un paio su somma e differenza di vettori, un paio sulle nozioni di parallelismo e ortogonalità, un paio sulle proiezioni ortogonali, un paio sulle rette nel piano, un paio su rette nello spazio ed un paio su piani nello spazio.

1 Vettori geometrici

Esercizio 1. Trovare $A + B$, $A - B$, $3A$, $-2B$ in ognuno dei seguenti casi. Nel caso di punti del piano, disegnare la figura.

1. $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$
2. $A = (-1, 3)$, $B = (0, 4)$
3. $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, 1, 1)$
4. $A = (-1, -2, 3)$, $B = (-1, 3, -4)$
5. $A = (\pi, 3, -1)$, $B = (2\pi, -3, 7)$
6. $A = (15, -2, 4)$, $B = (\pi, 3, -1)$

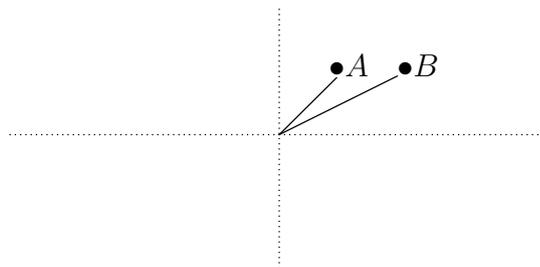
Nel caso dei punti A e B di 1., disegnare i punti $A + 2B$, $A + 3B$, $A - 2B$, $A - 3B$, $A + \frac{1}{2}B$.

Esercizio 2. Sia $A = (1, 2)$ e $B = (3, 1)$ due punti del piano. Disegnare $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$, $A - B$, $A - 2B$, $A - 3B$ su un foglio quadrettato.

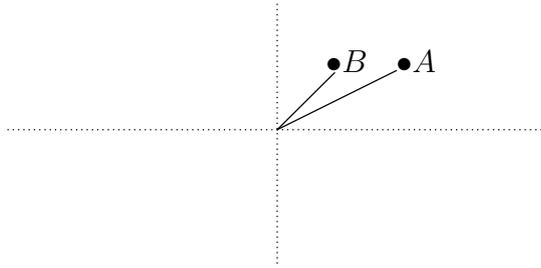
Esercizio 3. Siano $A = (2, -1)$ e $B = (-1, 1)$ due punti del piano. Disegnare i punti $A + 2B$, $A + 3B$, $A - 2B$, $A - 3B$, $A + \frac{1}{2}B$ su un foglio quadrettato.

Esercizio 4. Per ogni coppia di punti A e B disegnati di seguito, si trovi il punto $A - B$:

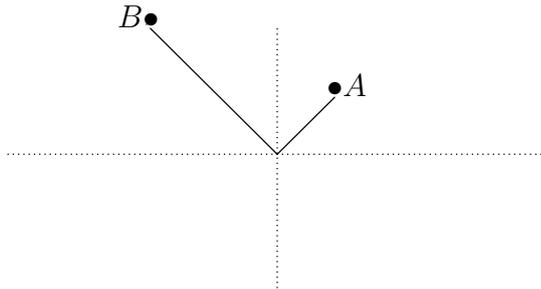
1.



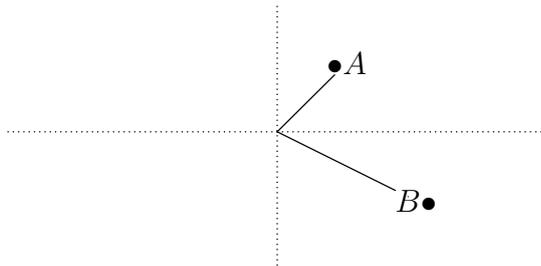
2.



3.



4.



Esercizio 5. In ognuno dei seguenti casi, si dica se i vettori geometrici $\vec{PQ} = \vec{AB}$:

1. $P = (1, -1)$, $Q = (4, 3)$, $A = (-1, 5)$, $B = (5, 2)$.
2. $P = (1, 4)$, $Q = (-3, 5)$, $A = (5, 7)$, $B = (1, 8)$.
3. $P = (1, -1, 5)$, $Q = (-2, 3, -4)$, $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 5, 10)$.
4. $P = (2, 3, -4)$, $Q = (-1, 3, 5)$, $A = (-2, 3, -1)$, $B = (-5, 3, 8)$.

Esercizio 6. In ognuno dei seguenti casi determinare quali vettori geometrici \vec{PQ} e \vec{AB} sono paralleli:

1. $P = (1, -1)$, $Q = (4, 3)$, $A = (-1, 5)$, $B = (7, 1)$.
2. $P = (1, 4)$, $Q = (-3, 5)$, $A = (5, 7)$, $B = (9, 6)$.
3. $P = (1, -1, 5)$, $Q = (-2, 3, -4)$, $A = (3, 1, 1)$, $B = (-3, 9, -17)$.
4. $P = (2, 3, -4)$, $Q = (-1, 3, 5)$, $A = (-2, 3, -1)$, $B = (-11, 3, -28)$.

Esercizio 7. Per ognuna delle seguenti coppie di punti A e B , si determinino i numeri $A \cdot A$ ed $A \cdot B$.

1. $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$;
2. $A = (-1, 3)$, $B = (0, 4)$;
3. $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, 1, 1)$;
4. $A = (-1, -2, 3)$, $B = (-1, 3, -4)$;
5. $A = (\pi, 3, -1)$, $B = (2\pi, -3, 7)$;
6. $A = (15, -2, 4)$, $B = (\pi, 3, -1)$.

Esercizio 8. Usando le proprietà formali del prodotto scalare, dimostrare le formule

1. $(A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B$;
2. $(A - B) \cdot (A - B) = A \cdot A - 2A \cdot B + B \cdot B$.

Esercizio 9. Quali delle seguenti coppie di vettori sono ortogonali?

1. $(1, -1, 1)$, $(2, 1, 5)$;
2. $(1, -1, 1)$, $(2, 3, 1)$;
3. $(-5, 2, 7)$, $(3, -1, 2)$;
4. $(\pi, 2, 1)$, $(2, -\pi, 0)$.

Esercizio 10. Sia A un vettore perpendicolare ad ogni vettore X . Dimostrare che $A = 0$.

Esercizio 11. Trovare la norma dei vettori A e B in ognuno dei seguenti casi:

1. $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$;
2. $A = (-1, 3)$, $B = (0, 4)$;
3. $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, 1, 1)$;
4. $A = (-1, -2, 3)$, $B = (-1, 3, -4)$;
5. $A = (\pi, 3, -1)$, $B = (2\pi, -3, 7)$;
6. $A = (15, -2, 4)$, $B = (\pi, 3, -1)$.

Esercizio 12. Trovare la proiezione di A lungo B per ogni coppia di vettori posizione corrispondenti ai punti A , B dell'esercizio 11.

Esercizio 13. Trovare la proiezione di B lungo A per ogni coppia vettori posizione corrispondenti ai punti A , B dell'esercizio 11.

Esercizio 14. Trovare il coseno dell'angolo tra i seguenti vettori A e B .

1. $A = (1, -2), B = (5, 3)$;
2. $A = (-3, 4), B = (2, -1)$;
3. $A = (1, -2, 3), B = (-3, 1, 5)$;
4. $A = (-2, 1, 4), B = (-1, -1, 3)$;
5. $A = (-1, 1, 0), B = (2, 1, -1)$.

Esercizio 15. Determinare il coseno di tutti gli angoli dei due triangoli di vertici rispettivamente:

1. $(2, -1, 1), (1, -3, -5), (3, -4, -4)$;
2. $(3, 1, 1), (-1, 2, 1), (2, -2, 5)$.

Esercizio 16. Siano A_1, \dots, A_r vettori non-nulli, mutuamente ortogonali, ovvero tali che $A_i \cdot A_j = 0$ se $i \neq j$. Siano c_1, \dots, c_r dei numeri tali che

$$c_1 A_1 + \dots + c_r A_r = 0.$$

Mostrare che $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$.

Esercizio 17. Per ogni coppia di vettori A, B , dimostrare le seguenti formule

1. $\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2$;
2. $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B$;
3. $\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 4A \cdot B$.

Interpretare la relazione in 1. come una “regola del parallelogramma”.

Equazioni di rette nel piano e nello spazio

Esercizio 18. Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle rette passanti rispettivamente per le seguenti coppie di punti dello spazio:

1. $P = (1, 3, -1)$ e $Q = (-4, 1, 2)$;
2. $P = (-1, 5, 3)$ e $Q = (-2, 4, 7)$.

Esercizio 19. Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle rette passanti rispettivamente per le seguenti coppie di punti:

1. $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (-2, 1, 3)$;
2. $P = (-1, 5, 2)$ e $Q = (3, -4, 1)$.

Esercizio 20. Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle rette passanti rispettivamente per le seguenti coppie di punti del piano:

1. $P = (1, 1)$ e $Q = (3, -2)$;
2. $P = (0, 1)$ e $Q = (1, 0)$;
3. $P = (-1, 1)$ e $Q = (\pi, \sqrt{2})$.

Esercizio 21. Trovare equazioni parametriche per ognuna delle seguenti rette del piano:

1. $3x - 5y + 2 = 0$;
2. $7x - 10y + 1 = 0$;
3. $\sqrt{2}x - \pi y + \sqrt{3} = 0$.

Esercizio 22. Siano $P = (1, 3, -1)$ e $Q = (-4, 5, 2)$. Determinare le coordinate dei seguenti punti:

1. Il punto medio del segmento tra P e Q ;
2. I due punti del segmento tra P e Q distanti un terzo e due terzi, rispettivamente, da P ;
3. Il punto che giace sul segmento tra P e Q a distanza un quinto da P ;
4. Il punto che giace sul segmento tra P e Q a distanza due quinto da P .

Esercizio 23. Mostrare che le rette del piano di equazione $2x + 3y = 1$ e $5x - 5y = 7$ rispettivamente non sono perpendicolari.

Esercizio 24. Siano $y = mx + b$ ed $y = m'x + c$ le equazioni di due rette del piano. Scrivere i vettori normali a queste rette. Mostrare che tali vettori sono perpendicolari tra loro se e solo se $mm' = -1$.

Esercizio 25. Trovare l'equazione della retta del piano, perpendicolare ad N e passante per P , per ognuno dei seguenti valori di P e N :

1. $N = (1, -1)$, $P = (-5, 3)$;
2. $N = (-5, 4)$, $P = (3, 2)$.

Esercizio 26. Mostrare che la retta di equazione $3x - 5y = 1$ e la retta di equazione $2x + 3y = 5$ non sono perpendicolari.

Esercizio 27. Quali delle seguenti coppie di rette sono perpendicolari (per definizione l'angolo tra due rette è l'angolo tra i rispettivi vettori direttori)?

1. $3x - 5y = 1$ e $2x + y = 2$;
2. $2x + 7y = 1$ e $x - y = 5$;
3. $3x - 5y = 1$ e $5x + 3y = 7$;
4. $-x + y = 2$ e $x + y = 9$.

Esercizio 28. Trovare le equazioni del piano perpendicolare al vettore N e passante per il punto P , per ognuno dei seguenti valori di N e P :

1. $N = (1, -1, 3)$ e $P = (4, 2, 1)$;
2. $N = (-3, -2, 4)$ e $P = (2, \pi, -5)$;
3. $N = (-1, 0, 5)$ e $P = (2, 3, 7)$.

Esercizio 29. Trovare le equazioni dei piani passanti rispettivamente per i tre punti:

1. $(2, 1, 1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 1, -1)$;
2. $(-2, 3, -1)$, $(2, 2, 3)$, $(-4, -1, 1)$;
3. $(-5, -1, 2)$, $(1, 2, -1)$, $(3, -1, 2)$.

Esercizio 30. Trovare un vettore perpendicolare sia a $(1, 2, -3)$ che a $(2, -1, 3)$ ed un altro vettore perpendicolare sia a $(-1, 3, 2)$ che a $(2, 1, 1)$.

Esercizio 31. Trovare un vettore parallelo alla retta di intersezione dei seguenti due piani dello spazio:

$$2x - y + z = 1, \quad 3x + y + z = 2.$$

Determinare una rappresentazione parametrica per tale retta.

Esercizio 32. Determinare equazioni cartesiane e parametriche per la retta ottenuta intersecando i seguenti piani dello spazio:

$$2x + y + 5z = 2, \quad 3x - 2y + z = 3.$$

Esercizio 33. Determinare il coseno degli angoli tra le seguenti coppie di piani (per definizione l'angolo tra due piani è l'angolo tra i rispettivi vettori normali):

1. $x + y + z = 1$ ed $x - y - z = 5$;
2. $2x + 3y - z = 2$ ed $x - y + z = 1$;
3. $x + 2y - z = 1$ ed $-x + 3y + z = 2$;
4. $2x + y + z = 3$ ed $-x - y + z = \pi$.

Esercizio 34. 1. Sia $P = (1, 3, 5)$ ed $A = (-2, 1, 1)$. Trovare l'intersezione della retta passante per P nella direzione di A , ed il piano di equazione $2x + 3y - z = 1$.

2. Sia $P = (1, 2, -1)$. Trovare il punto di intersezione del piano π di equazione $3x - 4y + z = 2$, con la retta passante per P e perpendicolare a π .

Esercizio 35. Siano $Q = (1, -1, 2)$, $P = (1, 3, -2)$ e $N = (1, 2, 2)$. Trovare il punto di intersezione della retta passante per P nella direzione di N , ed il piano passante per Q e perpendicolare ad N .