Esercizi Di Geometria 1
Geometria vettoriale

SETTIMANA 6
(30 Ottobre– 5 Novembre 2017)

Esercizio 1. Si considerino i seguenti punti dello spazio:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che i vettori sono a due a due ortogonali e di lunghezza 1. Calcolare il prodotto misto $\epsilon_{a,b,c} = v_a \cdot (v_b \times v_c)$ per ogni $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$.

Esercizio 2. Sia r una retta dello spazio avente coseni direttori $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ e $\cos(\gamma)$. Dimostrare che $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.

Esercizio 3. Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta dello spazio passante per l'origine e che forma un angolo di 30° con l'asse delle Y e di 60° con l'asse delle Z.

Esercizio 4. Sia r la retta del piano di equazione cartesane $-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$. Trovare la retta passante per $P_0 = (1, 1)^t$ e che forma un angolo di 60° con la retta r.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti punti del piano: $P_1 = (1, 1)^t$, $P_2 = (0, 1)^t$ $P_3 = (-1, 1)^t$ $P_4 = (0, -1)^t$. Trovare l'inviluppo convesso $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle_{conv}$ e calcolare la sua area.

Esercizio 6. Dimostrare che l'intersezione di insiemi convessi è convessa.

Esercizio 7. Sia r una retta dello spazio passante per il punto P_0 e con vettore direttore $\overrightarrow{d}$. Dato un punto P, dimostrare che la distanza di P da r è data da

$$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{|| \overrightarrow{P_0 P} \times \overrightarrow{d} ||}{|| \overrightarrow{d} ||}$$

Esercizio 8. Trovare equazione parametriche e cartesiane della retta r dello spazio passante per i due punti $P = (1, 1, 1)^t$ e $Q = (1, 2, 1)^t$. Determinare la distanza del punto $(2, 3, 2)^t$ dalla retta r.

Esercizio 9. Trovare l'area dell'inviluppo convesso dei seguenti punti del piano

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(Suggerimento: realizzare un vettore del piano come un vettore dello spazio con ultima coordinata zero ed usare il prodotto vettoriale.)

Esercizio 10. Siano $\overrightarrow{v_1} = (3, 1)^t$ e $\overrightarrow{v_2} = (1, 1)^t$ due vettori del piano. Descrivere graficamente l'insieme

$$D = \{t_1 \overrightarrow{v_1} + t_2 \overrightarrow{v_2} \mid 0 \leq t_1 \leq 1,\ 0 \leq t_2 \leq 1\}.$$

Realizzare D come un inviluppo convesso.

Esercizio 11. Si considerino tre particelle di massa 1, 2 e 3 e posizione $(1, 1)^t$, $(3, 1)^t$ e $(2, 3)$ rispettivamente. Trovare il centro di massa del sistema.

Esercizio 12. Si considerino tre particelle di uguale massa 1 e posizione $(1, 1)^t$, $(3, 1)^t$ e $(2, 3)$ rispettivamente. Trovare il centro di massa del sistema e verificare che esso coincide con il centrodie del loro inviluppo convesso (ovvero l'intersezione delle mediane).

Esercizio 13. Descrivere l'inviluppo affine dei punti $P = (1, 1)$ e $Q = (2, 2)$ del piano.