Esercizi Di Geometria 1
Determinanti

SETTIMANA 7
(6– 12 Novembre 2017)

Esercizio 1. Dimostrare che due vettori $v_1 = (\ell_1, m_1, n_2)^t$ e $v_2 = (\ell_2, m_2, n_2)^t$ dello spazio sono paralleli se e solo se $v_1 \times v_2 = 0$.

Esercizio 2. Siano $v_1 = (\ell_1, m_1, n_1)^t$ e $v_2 = (\ell_2, m_2, n_2)^t$ due vettori dello spazio non–paralleli tra loro. Sia $w = (a, b, c)^t$ un altro vettore dello spazio. Dimostrare che $w \in \langle v_1, v_2 \rangle$ (ovvero w è combinazione lineare di v_1 e v_2) se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ a & b & c \end{pmatrix} = 0$$

Esercizio 3. Usare l'esercizio 2 per determinare se il punto P appartiene al piano π in ognuno dei seguenti casi:

1. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi : t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R})$

2. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R})$

3. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R})$

Esercizio 4. Dire se le seguenti coppie di rette sono coincidenti, incidenti, parallele o sghembe.

1.

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R}) \qquad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 - t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$$

2.

$$\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=3+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

3.

$$\begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} x+z+1=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Trovare l'inversa delle seguenti matrici, utilizzando la formula di Cramer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare il risultato con MATLAB.

Esercizio 6. Calcolare la distanza tra le seguenti due rette (sghembe) dello spazio

$$r_1 : \begin{cases} x=y \\ x=2z \end{cases} \quad ; \quad r_2 : \begin{cases} x+2y=0 \\ z=1 \end{cases} \quad .$$

Esercizio 7. Trovare una decomposizione LU della seguente matrice ed utilizzarla per calcolarne il determinante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & 14 & 22 & 31 & 40 \\ 3 & 8 & 15 & 21 & 28 \end{pmatrix}.$$

Verificare il risultato con MATLAB.

Esercizio 8. Dimostrare, esibendo un controesempio, che il determinante $\det : \mathrm{Mat}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ non è una funzione lineare: ovvero dimostrare che le seguenti affermazioni sono *false*:

1. per ogni coppia di matrici quadrate A, B si ha che $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$;
2. per ogni scalare $k \in \mathbb{R}$ e per ogni matrice quadrata A si ha che $\det(kA) = k\det(A)$.

Esercizio 9. Scrivere gli sviluppi di Laplace per la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto a ciascuna riga e a ciascuna colonna (6 sviluppi in tutto) e verificare che danno tutti lo stesso risultato.