Esercizi Di Geometria 1
Determinanti e trasformazioni del piano

SETTIMANA 8
(13– 19 Novembre 2017)

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti matrici A dare la visualizzazione grafica della trasformazione lineare T_A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Sia $T = T_A$ la trasformazione del piano di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Sia P il quadrilatero di vertici $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $P_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area di $T(P)$.

Esercizio 3. Nei due casi seguenti trovare il volume del parallelepipedo determinato dai vettori u, v e w:

1. $u = (1, 1, 2)^t$, $v = (2, 0, 1)^t$, $w = (-1, 1, 2)^t$.
2. $u = (3, 0, 1)^t$, $v = (-3, 1, 2)^t$, $w = (1, 1, 1)^t$.

Esercizio 4. In ognuno dei seguenti casi, i punti dati appartengono tutti allo stesso piano? Motivare la risposta:

1. $A = (-1, 1, 2)^t$, $B = (1, 0, 1)^t$, $C = (2, 3, 0)^t$, $D = (5, 1, 1)$.
2. $A = (1, 4, 1)^t$, $B = (0, 2, 1)^t$, $C = (2, 0, -1)^t$, $D = (-1, 3, 2)$.

Esercizio 5. In ognuno dei seguenti casi, trovare la matrice di T, i vettori $T((1, 1)^t)$ e $T((2, -1)^t)$ e tracciare l'immagine del quadrato unitario quando:

1. T è la riflessione rispetto alla retta $y = 3x$.
2. T è la rotazione di angolo $-\pi/4$.
3. T è la proiezione sulla retta $x + 2y = 0$.

Esercizio 6. Dato $a > 0$ si consideri la trasformazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che porta un punto P distante r dall'origine, nel punto Q distante ar dall'origine, e che giace sulla retta per P e per l'origine. Si mostri che T è una trasformazione lineare, si trovi la sua matrice e si tracci l'immagine del quadrato unitario. (T si dice una *dilatazione* se $a > 1$ ed una *contrazione* se $0 < a < 1$.)

Esercizio 7. In ognuno dei seguenti casi trovare una riflessione o una rotazione che coincida con le trasformazioni date:

1. Riflessione rispetto all'asse Y seguita dalla rotazione di angolo $\pi/2$.
2. Rotazione di angolo π seguita dalla riflessione rispetto all'asse X.
3. Riflessione rispetto alla retta $y = x$ seguita dalla riflessione rispetto all'asse X.

Esercizio 8. In ognuno dei seguenti casi, determinare la trasformazione lineare data:

1. Rotazione di $\pi/2$, seguita dalla proiezione sull'asse Y, seguita dalla riflessione rispetto alla retta $y = x$.
2. Proiezione sulla retta $y = x$ seguita dalla proiezione sulla retta $y = -x$.
3. Proiezione sull'asse X seguita dalla riflessione rispetto alla retta $y = x$.

Esercizio 9. Nei seguenti casi dimostrare che esiste un'unica trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa alle condizioni date:

1. $T((1,0)^t) = (2,-3)^t$, $T((0,1)^t) = (4,-2)$.
2. $T((1,2)^t) = (1,-3)^t$, $T((3,-1)^t) = (2,1)$.
3. $T((1,1)^t) = (2,-1)^t$, $T((1,-1)^t) = (-1,1)$.
4. $T((1,-1)^t) = (1,0)^t$, $T((2,1)^t) = (2,-3)$.

Esercizio 10. Sia $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ un vettore non–nullo e si consideri la trasformazione

$$F_{\theta,\vec{w}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \vec{v} \mapsto R_\theta(v) + \vec{w}$$

per un qualche angolo θ fissato.

1. Dimostrare che F non è lineare.
2. Trovare una matrice 3×3 che rappresenta l'azione di $F_{\theta,\vec{w}}$ (sugg.: usare coordinate omogenee).
3. Calcolare l'azione di $F_{\pi/2,\vec{i}}$ e visualizzarla graficamente.

Esercizio 11. Calcolare l'area del quadrilatero di vertici $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 12. Sia $\theta = \pi/3$ e si considerino i seguenti punti del piano: $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici $R_\theta(P_1)$, $R_\theta(P_2)$ ed $R_\theta(P_3)$.