Esercizi Di Geometria 1
Diagonalizzazione

SETTIMANA 9
(20– 26 Novembre 2017)

Esercizio 1. Stabilire, motivando la risposta geometricamente e senza eseguire calcoli, se le seguenti trasformazioni lineari del piano sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$, o ammettano almeno un autovettore reale, o se non ammettano nessun autovettore reale:

1. Una rotazione di $\pi/3$;
2. Una rotazione di π;
3. Una riflessione rispetto alla retta di pendenza $m = 1/2$;
4. Una riflessione rispetto alla retta di pendenza $1/2$ seguita da una riflessione rispetto ad una retta di pendenza $1/5$;
5. Un X–taglio di parametro $a > 1$;
6. Un Y–taglio di parametro $0 < a < 1$;
7. La trasformazione identica;
8. La trasformazione nulla.

Nel caso li abbiano, determinare gli autovalori ed i corrispondenti autovettori (algebricamente).

Esercizio 2. Motivare geometricamente il seguente fatto visto a lezione: la matrice di una riflessione rispetto ad una retta (per l'origine) che forma un angolo θ con l'asse delle X ha matrice associata

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Calcolare lo spettro della proiezione su una retta $r \subset \mathcal{E}^2$ passante per l'origine e di pendenza m. Per ogni autovalore trovato, determinare un corrispondente autovettore. Discutere il risultato geometricamente.

Esercizio 4. Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici utilizzando le formule viste a lezione.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Verificare il risultato con MATLAB.

Esercizio 5. In ognuno dei seguenti casi stabilire se i vettori dati sono o meno linearmente indipendenti; nel caso non lo siano trovare un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti:

1. $X_1 = (1, 2)^t$, $X_2 = (1, 1)^t$;
2. $X_1 = (1, 2, 3)^t$, $X_2 = (1, 1, 1)^t$;
3. $X_1 = (1, 2, 3, 4)^t$, $X_2 = (1, 1, 1, 4)^t$, $X_3 = (1, 3, 5, 4)^t$.

Estendere il sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti ad una base.

Esercizio 6. Sia $\pi = \langle v_1, v_2 \rangle$ il piano di $\mathbb{R}^3$ generato dai due vettori $v_1 = (1, 1, 1)^t$ e $v_2 = (1, 2, 1)^t$. Si consideri la *proiezione ortogonale* su π: essa è la funzione definita da

$$P_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto v - pr_n(v)$$

che associa ad un vettore la sua proiezione ortogonale su π (chi è n?). Stabilire se P_π è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.

Esercizio 7. Calcolare la decima potenza della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Stabilire per quali $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile e per tali valori trovare una base di autovettori.