Esercizi Di Geometria 1
Proiezioni Ortogonali, Approssimazione ai minimi quadrati, Diagonalizzazione ortogonale

SETTIMANA 11
4– 10 Dicembre 2017)

Esercizio 1 (Eser 1, pg. 341)**.** In ciascuno dei seguenti casi, si scriva il vettore X come somma di un vettore in U e di un vettore in $U^{\perp}$.

1. $X = (3, -1, 2)^t$, $U = \langle (1, 2, -1)^t, (2, 0, 1)^t \rangle$;
2. $X = (1, 1, 3)^t$, $U = \langle (-1, 0, 2)^t, (3, 1, 5)^t \rangle$;
3. $X = (3, 0, 2, 1)^t$, $U = \langle (1, 1, 1, 1)^t, (1, 1, -1, -1)^t, (1, -1, 1, -1)^t \rangle$;
4. $X = (a, b, c, d)^t$, $U = \langle (1, 0, 0, 0)^t, (0, 1, 0, 0)^t, (0, 0, 1, 0)^t \rangle$;
5. $X = (a, b, c, d)^t$, $U = \langle (1, -1, 2, 0)^t, (-1, 1, 1, 1)^t \rangle$.

Esercizio 2 (Eser. 4, pg 342)**.** Trovare le soluzioni approssimate di ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni lineari (le equazioni di ciascun sistema sono scritte una affianco all'altra per motivi tipografici):

1. $x - y = 3$, $2x + y = -1$, $x + 5y = -4$.
2. $2x + y = 1$, $x - y = 2$, $x + 5y = 3$.
3. $x + y + z = 1$, $2x - y - z = 0$, $-x + 2y + 3z = 2$, $2x + 2y + 3z = 1$.
4. $x - y + 2z = 0$, $3x + y + z = -1$, $2x + y - 3z = 3$, $3x + 4y - 4z = 1$.

Esercizio 3 (Eser. 10, pg. 342)**.** Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Mostrare che un vettore $X \in \mathbb{R}^n$ appartiene ad U se e solo se $\mathrm{proj}_U(X) = X$.

Esercizio 4 (Eser 5, pg. 342)**.** Si determini un polinomio di grado ≤ 2 che meglio approssimi, nel senso dei minimi quadrati, le seguenti coppie di dati.

1. (-1,1), (0,0), (2,3), (3,4);
2. (-1,0), (0,2), (1,1), (3,-1).

Verificare e rappresentare graficamente il risultato con MATLAB (utilizzando i comandi `polyfit` e `polyval`- consultare la guida di MATLAB per informazioni su questi comandi).

Esercizio 5 (Eser 6, pg. 342). Si determini un polinomio di grado ≤ 3 che meglio approssimi, nel senso dei minimi quadrati, le seguenti coppie di dati.

1. (-1,1), (0,-1), (1,3), (3,-4);
2. (-2,0), (0,3), (1,2), (3,-1), (4,1).

Verificare e rappresentare graficamente il risultato con MATLAB (utilizzando i comandi `polyfit` e `polyval`- consultare la guida di MATLAB per informazioni su questi comandi).

Esercizio 6 (Eser 2, pg. 187). Alcune osservazioni sulla crescita di una azione sono date nella seguente tabella:

Settimana	1	2	3
Valore (Euro)	1.22	1.49	2.45

1. Utilizzare l'interpolazione polinomiale (ovvero un polinomio di grado=numero di dati meno 1) per stimare il valore dell'azione nella quarta e nella decima settimana.
2. Supponiamo di sapere che il valore effettivo per la quarta settimana sia 3.75 Euro. Mediante l'interpolazione polinomiale si stimi il valore dell'azione nella quinta e nella decima settimana.
3. Dedurre se tale metodo fornisce informazioni attendibili o meno.

(utilizzando i comandi `polyfit` e `polyval`- consultare la guida di MATLAB per informazioni su questi comandi).

Esercizio 7. Siano $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tre numeri dati. Dimostrare che il determinante della matrice di Vandermonde 3×3 è dato dalla seguente formula:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

In particolare la matrice di Vandermonde 3×3 è invertibile se e solo se $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$.

In generale (per ogni $n \geq 1$) vale la seguente formula (determinante di Vandermonde):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Esercizio 8. Siano P e Q matrici $n \times n$. Dimostrare le seguenti affermazioni:

1. Se P è ortogonale allora $|\det P| = 1$.
2. Se P è ortogonale allora anche $P^{-1} = {}^tP$ è ortogonale.
3. Se P e Q sono ortogonali, allora anche PQ è ortogonale.

Esercizio 9. Diagonalizzare ortogonalmente la seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.