SETTIMANA 11

ESERCIZIO 1.1

```
X=sym([3;-1;2])
```

X =

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
X1=sym([1;2;-1])
```

X1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

```
X2=sym([2;0;1])
```

X2 =

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in questo caso siamo in R^3 e quindi la proiezione ortogonale di X su U si potrebbe trovare con il prodotto vettoriale. Utilizziamo invece l'algoritmo di Gram-Schmidt per costruire una base ortonormale di U a partire da X1 ed X2:

```
F1=X1
```

F1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

```
a12=sym((X2'*F1)/(F1'*F1))
```

a12 =

$$\frac{1}{6}$$

```
F2=X2-a12*F1
```

F2 =

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

{E1, E2} è una base ortonormale di U. La proiezione di X su U è data da

```
a=sym(X'*F1)/sym(F1'*F1)
```

a =

$$-\frac{1}{6}$$

```
b=sym(X'*F2)/sym(F2'*F2)
```

b =

$$\frac{49}{29}$$

```
ProjX=a*F1+b*F2
```

ProjX =

$$\begin{pmatrix} \frac{85}{29} \\ -\frac{26}{29} \\ \frac{62}{29} \end{pmatrix}$$

```
Y=X-ProjX
```

Y =

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{29} \\ -\frac{3}{29} \\ -\frac{4}{29} \end{pmatrix}$$

Quindi Y appartiene al complemento ortogonale di U e

```
X=ProjX+Y
```

X =

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 1.5

```
syms a b c d
X=[a;b;c;d]
```

X =

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

```
X1=sym([1;-1;2;0])
```

X1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
X2=sym([-1;1;1;1])
```

X2 =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per costruire una base ortonormale di U a partire da X1, X2 ed X3:

```
F1=X1
```

F1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
a12=sym((X2'*F1)/(F1'*F1))
```

a12 = 0

```
F2=X2-a12*F1
```

F2 =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

{F1, F2}={X1,X2} è una base ortonormale di U. La proiezione di X su U è data da

```
s=sym(F1'*X)/sym(F1'*F1)
```

s =

$$\frac{a}{6} - \frac{b}{6} + \frac{c}{3}$$

```
t=sym(F2'*X)/sym(F2'*F2)
```

t =

$$\frac{b}{4} - \frac{a}{4} + \frac{c}{4} + \frac{d}{4}$$

```
ProjX=s*F1+t*F2
```

ProjX =

$$\begin{pmatrix} \frac{5\,a}{12} - \frac{5\,b}{12} + \frac{c}{12} - \frac{d}{4} \\ \frac{5\,b}{12} - \frac{5\,a}{12} - \frac{c}{12} + \frac{d}{4} \\ \frac{a}{12} - \frac{b}{12} + \frac{11\,c}{12} + \frac{d}{4} \\ \frac{b}{4} - \frac{a}{4} + \frac{c}{4} + \frac{d}{4} \end{pmatrix}$$

```
Y=X-ProjX
```

Y =

$$\begin{pmatrix} \frac{7\,a}{12} + \frac{5\,b}{12} - \frac{c}{12} + \frac{d}{4} \\ \frac{5\,a}{12} + \frac{7\,b}{12} + \frac{c}{12} - \frac{d}{4} \\ \frac{b}{12} - \frac{a}{12} + \frac{c}{12} - \frac{d}{4} \\ \frac{a}{4} - \frac{b}{4} - \frac{c}{4} + \frac{3\,d}{4} \end{pmatrix}$$

Quindi Y appartiene al complemento ortogonale di U e

```
X=ProjX+Y
```

X =

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2.1

```
syms x y
eqn1= x-y==1
```

eqn1 = $x - y = 1$

```
eqn2= 2*x+y==-1
```

eqn2 = $2x + y = -1$

```
eqn3= x+5*y==-4
```

eqn3 = $x + 5y = -4$

```
[A,b]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3)
```

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vediamo se il sistema è compatibile:

```
linsolve(A,b)
```

Warning: The system is inconsistent. Solution does not exist.

ans =

$$\begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}$$

Non lo è! Cerchiamo le soluzioni approssimate. Abbiamo visto due metodi: 1) Risolvere il sistema A'AX=A'b. 2) Trovare la decomposizione QR di A=QR, e risolvere RX=Q'b.

Intanto vediamo se c'è un'unica soluzione, studiando il rango di A

```
rank(A)
```

ans = 2

Poichè A ha due colonne, ed il suo rango è due, ne segue che A'A è invertibile e quindi c'è un'unica soluzione approssimata.

Metodo 1

Poniamo

```
C=A'*A
```

```
C =
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$$

```
d=A'*b
```

```
d =
```

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -22 \end{pmatrix}$$

e risolviamo:

```
Z=linsolve(C,d);
```

Per cui l'unica soluzione approssimata è

```
Z
```

```
Z =
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{42} \\ -\frac{17}{21} \end{pmatrix}$$

La distanza tra b e la sua proiezione su Im(A) è

```
norm(b-A*Z)
```

```
ans =
```

$$\frac{\sqrt{14}}{14}$$

Metodo 2

Troviamo la decomposizione QR di A

```
A=sym(A)
```

```
A =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ortogonalizzare le colonne C1 e C2 di A:

```
C1=A(:,1)
```

C1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
C2=A(:,2)
```

C2 =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
F1=C1
```

F1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
a12=sym(C2'*F1)/sym(F1'*F1)
```

a12 = 1

```
F2=C2-a12*F1
```

F2 =

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Adesso normalizziamo F1 ed F2 e troviamo una base ortonormale {E1,E2} di Im(A)

```
N1=sqrt(F1'*F1)
```

N1 = $\sqrt{6}$

```
N2=sqrt(F2'*F2)
```

N2 = $\sqrt{21}$

```
E1=1/N1*F1
```

E1 =

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

```
E2=1/N2*F2
```

E2 =

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{21}}{21} \\ -\frac{\sqrt{21}}{21} \\ \frac{4\sqrt{21}}{21} \end{pmatrix}$$

La matrice Q ha per colonne E1 ed E2

```
Q=[E1,E2]
```

Q =

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{21}}{21} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{21}}{21} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{4\sqrt{21}}{21} \end{pmatrix}$$

La matrice R è ottenuta dalla matrice [1,a12; 0, 1] moltiplicando la prima riga per N1 e la seconda riga per N2:

```
R=[N1,N1*a12;0,N2]
```

R =

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{21} \end{pmatrix}$$

Verifichiamo:

```
Q*R==A
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 = 1 & -1 = -1 \\ 2 = 2 & 1 = 1 \\ 1 = 1 & 5 = 5 \end{pmatrix}$$

Torna! Adesso dobbiamo risolvere il sistema RX=Q'b

```
d=Q'*b
```

d =

$$\begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{17\sqrt{21}}{21} \end{pmatrix}$$

```
Z=linsolve(R,d)
```

Z =

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{42} \\ -\frac{17}{21} \end{pmatrix}$$

... e ritroviamo la soluzione ottenuta con il metodo 1.

ESERCIZIO 2.3

```
syms x y z
eqn1= x+y+z==1
```

eqn1 = $x + y + z = 1$

```
eqn2= 2*x-y-z==0
```

eqn2 = $2x - y - z = 0$

```
eqn3= -x+2*y+3*z==2
```

eqn3 = $2y - x + 3z = 2$

```
eqn4= 2*x+2*y+3*z==1
```

eqn4 = $2x + 2y + 3z = 1$

```
[A,b]=equationsToMatrix(eqn1,eqn2,eqn3,eqn4)
```

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vediamo se il sistema è compatibile:

```
linsolve(A,b)
```

```
Warning: The system is inconsistent. Solution does not exist.
ans =
```

$$\begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}$$

Non lo è! Cerchiamo le soluzioni approssimate. Abbiamo visto due metodi:

1) Risolvere il sistema A'AX=A'b.

2) Trovare la decomposizione QR di A=QR, e risolvere RX=Q'b.

Intanto vediamo se c'è un'unica soluzione, studiando il rango di A

```
rank(A)
```

```
ans = 3
```

Poichè A ha tre colonne, ed il suo rango è tre, ne segue che A'A è invertibile e quindi c'è un'unica soluzione approssimata.

Metodo 1

Poniamo

```
C=A'*A
```

```
C =
```

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 14 \\ 2 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

```
d=A'*b
```

```
d =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

e risolviamo:

```
Z=linsolve(C,d);
```

Per cui l'unica soluzione approssimata è

```
Z
```

Z =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La distanza tra b e la sua proiezione su Im(A) è

```
norm(b-A*Z)
```

ans = 1

<u>Metodo 2</u>

Troviamo la decomposizione QR di A

```
A=sym(A)
```

A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ortogonalizzare le colonne C1, C2 e C3 di A:

```
C1=A(:,1)
```

C1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
C2=A(:,2)
```

C2 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
C3=A(:,3)
```

C3 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
F1=C1
```

F1 =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
a12=sym(C2'*F1)/sym(F1'*F1)
```

a12 =

$$\frac{1}{10}$$

```
F2=C2-a12*F1
```

F2 =

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{21}{10} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

```
a13=sym(C3'*F1)/sym(F1'*F1)
```

a13 =

$$\frac{1}{5}$$

```
a23=sym(C3'*F2)/sym(F2'*F2)
```

a23 =

$$\frac{46}{33}$$

```
F3=C3-a13*F1-a23*F2
```

F3 =

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Adesso normalizziamo F1, F2 ed F3 e troviamo una base ortonormale {E1,E2, E3} di Im(A)

```
N1=sqrt(F1'*F1)
```

N1 = $\sqrt{10}$

```
N2=sqrt(F2'*F2)
```

N2 =

$$\frac{3\,\sqrt{10}\,\,\sqrt{11}}{10}$$

```
N3=sqrt(F3'*F3)
```

N3 =

$$\frac{2\,\sqrt{11}}{11}$$

```
E1=1/N1*F1
```

E1 =

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}$$

```
E2=1/N2*F2
```

E2 =

$$\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}\ \sqrt{11}}{110} \\ -\frac{2\sqrt{10}\ \sqrt{11}}{55} \\ \frac{7\sqrt{10}\ \sqrt{11}}{110} \\ \frac{3\sqrt{10}\ \sqrt{11}}{55} \end{pmatrix}$$

```
E3=1/N3*F3
```

E3 =

$$\begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{11}}{22} \\ \frac{3\sqrt{11}}{22} \\ \frac{3\sqrt{11}}{22} \\ \frac{\sqrt{11}}{22} \end{pmatrix}$$

La matrice Q ha per colonne E1, E2 ed E3

```
Q=[E1,E2,E3]
```

Q =

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}\ \sqrt{11}}{110} & -\frac{5\sqrt{11}}{22} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} & -\frac{2\sqrt{10}\ \sqrt{11}}{55} & \frac{3\sqrt{11}}{22} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{7\sqrt{10}\ \sqrt{11}}{110} & \frac{3\sqrt{11}}{22} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{3\sqrt{10}\ \sqrt{11}}{55} & \frac{\sqrt{11}}{22} \end{pmatrix}$$

La matrice R è ottenuta dalla matrice [1,a12, a13; 0, 1, a23; 0,0,1] moltiplicando la prima riga per N1, la seconda riga per N2 e la terza riga per N3:

```
R=[N1,N1*a12, N1*a13;0,N2, N2*a23; 0, 0, N3]
```

R =

$$\begin{pmatrix} \sqrt{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{5} \\ 0 & \frac{3\ \sqrt{10}\ \sqrt{11}}{10} & \frac{23\ \sqrt{10}\ \sqrt{11}}{55} \\ 0 & 0 & \frac{2\ \sqrt{11}}{11} \end{pmatrix}$$

Verifichiamo:

```
Q*R==A
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 = 1 & 1 = 1 & 1 = 1 \\ 2 = 2 & -1 = -1 & -1 = -1 \\ -1 = -1 & 2 = 2 & 3 = 3 \\ 2 = 2 & 2 = 2 & 3 = 3 \end{pmatrix}$$

Torna! Adesso dobbiamo risolvere il sistema RX=Q'b

```
d=Q'*b
```

```
d =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{23\ \sqrt{10}\ \sqrt{11}}{110} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \end{pmatrix}$$

```
Z=linsolve(R,d)
```

```
Z =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

... e ritroviamo la soluzione ottenuta con il metodo 1.

ESERCIZIO 3

Sia X un vettore di R^n e sia P=Proj(X) la proiezione ortogonale di X su U. Allora X=(X-P)+P e (X-P) è ortogonale ad U.

Se X appartiene ad U, allora (X-P)*(X-P)=(X-P)*X- P*(X-P); poichè sia X che P appartengono ad U e (X-P) è ortogonale ad U, ne segue che (X-P)*(X-P)=0 e quindi (X-P)=0 e quindi X=P.

Se X=P, allora X appartiene ad U.

ESERCIZIO 4.1

Importiamo i quattro dati in due vettori X ed Y, in cui X contiene le ascisse dei dati ed Y le ordinate

```
X=[-1,0,2,3];
Y=[1,0,3,4];
```

Il polinomio di grado 1 che meglio approssima i dati è

```
syms x
p=polyfit(X,Y,1);
p1=[x,1]*p'
```

```
p1 =
```

$$\frac{9\,x}{10}+\frac{11}{10}$$

Il polinomio di grado 2 che meglio approssima i dati è

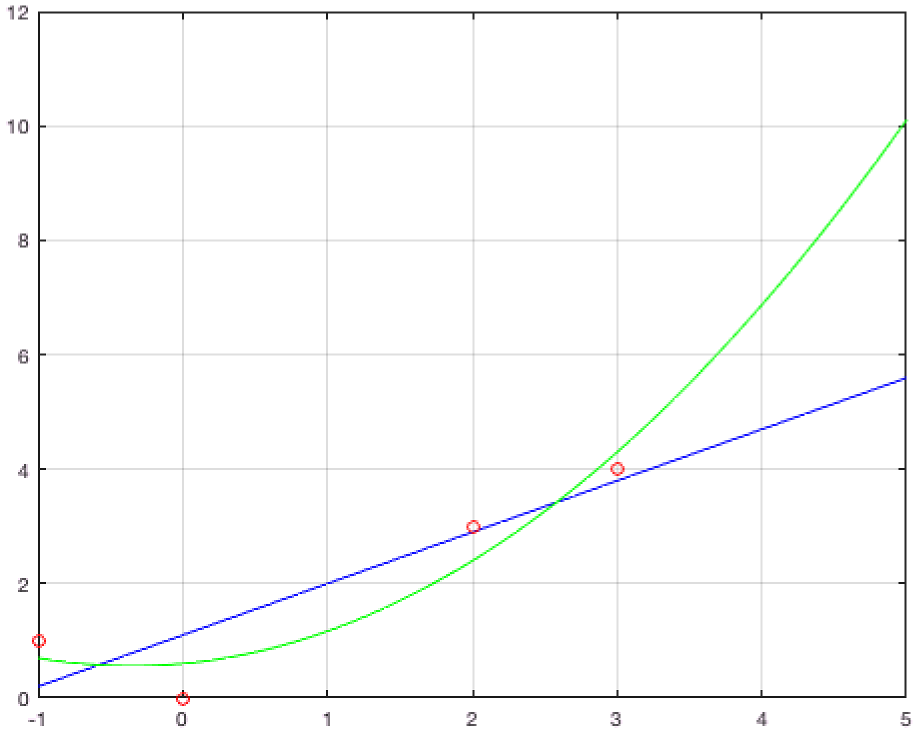
```
q=polyfit(X,Y,2);
p2=[x^2, x,1]*q'
```

```
p2 =
```

$$\frac{x^2}{3}+\frac{7\,x}{30}+\frac{3}{5}$$

Rappresentiamo graficamente i dati (con dei cerchi ROSSI), la loro approssimazione lineare (in BLU) e quadratica (in VERDE)

```
x=-1:.1:5;
plot(x,polyval(p,x),'b')
hold on
grid on
plot(X,Y,'or')
plot(x,polyval(q,x),'g')
hold off
```



ESERCIZIO 4.2

Importiamo i quattro dati in due vettori X ed Y, in cui X contiene le ascisse dei dati ed Y le loro ordinate:

```
X=[-1,0,1,3];
Y=[0,2,1,-1];
```

Il polinomio di grado 1 che meglio approssima i dati è

```
syms x
p=polyfit(X,Y,1);
p1=[x,1]*p'
```

p1 =

$$\frac{4}{5} - \frac{2\,x}{5}$$

Il polinomio di grado 2 che meglio approssima i dati è

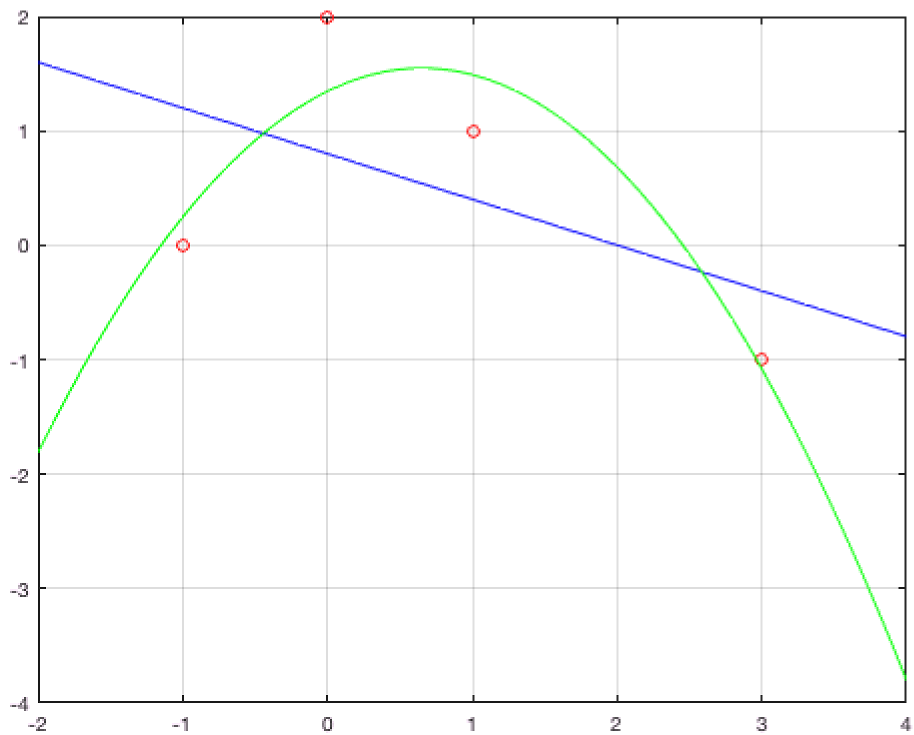
```
q=polyfit(X,Y,2);
p2=[x^2, x,1]*q'
```

p2 =

$$-\frac{21\,x^2}{44} + \frac{137\,x}{220} + \frac{74}{55}$$

Rappresentiamo graficamente i dati (con dei cerchi ROSSI), la loro approssimazione lineare (in BLU) e quadratica (in VERDE)

```
x=-2:.1:4;
plot(x,polyval(p,x),'b')
hold on
grid on
plot(X,Y,'or')
plot(x,polyval(q,x),'g')
hold off
```



ESERCIZIO 5.1

Importiamo i quattro dati in due vettori X ed Y, in cui X contiene le ascisse dei dati ed Y le loro ordinate:

```
X=[-1,0,1,3];
Y=[1,-1,3,-4];
```

Il polinomio di grado 1 che meglio approssima i dati è

```
syms x
p=polyfit(X,Y,1);
p1=[x,1]*p'
```

p1 =

$$\frac{19}{35} - \frac{37\,x}{35}$$

Il polinomio di grado 2 che meglio approssima i dati è

```
q=polyfit(X,Y,2);
p2=[x^2, x,1]*q'
```

```
p2 =
```

$$-\frac{3\,x^2}{4}+\frac{11\,x}{20}+\frac{7}{5}$$

Il polinomio di grado 3 che meglio approssima i dati è

```
r=polyfit(X,Y,3);
p3=[x^3,x^2, x,1]*r'
```

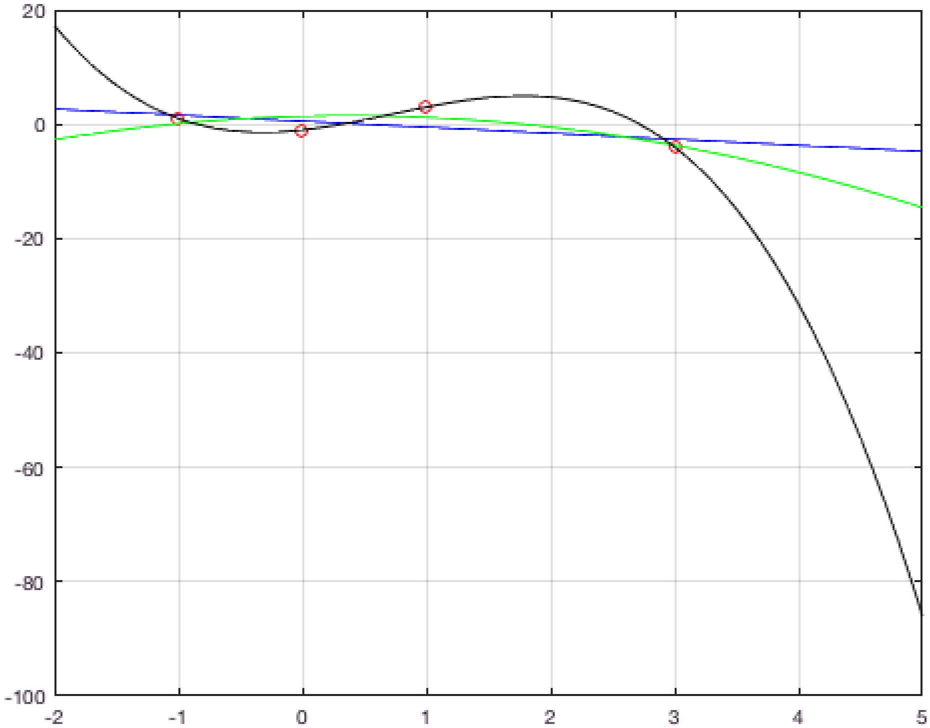
```
p3 =
```

$$-\frac{11\,x^3}{8}+3\,x^2+\frac{19\,x}{8}-1$$

Si noti che dato che i quattro dati hanno ascissa distinta, il polinomio di grado tre (=4-1) è proprio il polinomio interpolatore dei dati.

Rappresentiamo graficamente i dati (con dei cerchi ROSSI), la loro approssimazione lineare (in BLU), quadratica (in VERDE) e cubica (in NERO)

```
x=-2:.1:5;
plot(x,polyval(p,x),'b')
hold on
grid on
plot(X,Y,'or')
plot(x,polyval(q,x),'g')
plot(x,polyval(r,x),'k')
hold off
```



ESERCIZIO 5.2

Importiamo i cinque dati in due vettori X ed Y, in cui X contiene le ascisse dei dati ed Y le loro ordinate:

```
X=[-2,0,1,3,4];
Y=[0,3,2,-1,1];
```

Il polinomio di grado 1 che meglio approssima i dati è

```
syms x
p=polyfit(X,Y,1);
p1=[x,1]*p'
```

```
p1 =
```

$$\frac{22}{19} - \frac{5\,x}{38}$$

Il polinomio di grado 2 che meglio approssima i dati è

```
q=polyfit(X,Y,2);
p2=[x^2, x,1]*q'
```

```
p2 =
```

$$-\frac{31\,x^2}{154} + \frac{45\,x}{154} + \frac{13}{7}$$

Il polinomio di grado 3 che meglio approssima i dati è

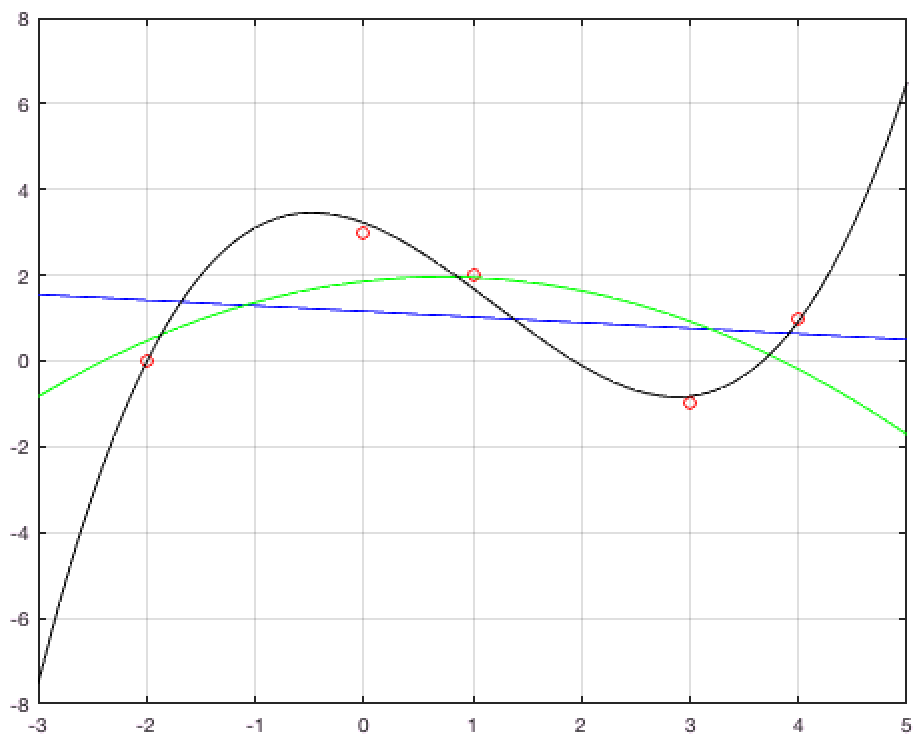
```
r=polyfit(X,Y,3);
p3=[x^3,x^2, x,1].*r
```

p3 =

$$\begin{pmatrix} \frac{13\,x^3}{57} & -\frac{219\,x^2}{266} & -\frac{743\,x}{798} & \frac{429}{133} \end{pmatrix}$$

Rappresentiamo graficamente i dati (con dei cerchi ROSSI), la loro approssimazione lineare (in BLU), quadratica (in VERDE) e cubica (in NERO)

```
x=-3:.1:5;
plot(x,polyval(p,x),'b')
hold on
grid on
plot(X,Y,'or')
plot(x,polyval(q,x),'g')
plot(x,polyval(r,x),'k')
hold off
```



Esercizio 6

Importiamo i tre dati in due vettori X ed Y, in cui X contiene le settimane (1,2 e 3) ed Y il valore dell'azione nella corrispondente settimana:

```
X=[1,2,3];
Y=[1.22,1.49,2.45];
```

Poichè i tre dati hanno ascissa diversa, esiste un unico polinomio di grado due che li interpola. Esso è dato da:

```
syms x
p=polyfit(X,Y,2);
p2=[x^2,x,1]*p'
```

```
p2 =
```

$$\frac{69\,x^2}{200}-\frac{153\,x}{200}+\frac{41}{25}$$

Se utilizziamo questo polinomio come stima dell'andamento del prezzo dell'azione, otteniamo che alla quarta settimana l'azione vale circa (in EURO)

```
polyval(p,4)
```

```
ans = 4.1000
```

ed alla decima settimana (in EURO)

```
polyval(p,10)
```

```
ans = 28.4900
```

Supponendo di sapere che alla quarta settimana l'azione valga 3.75 Eur (e non 4.1 Eur, come previsto dalla stima quadratica), allora possiamo trovare un unico polinomio di grado 3 che interpola i quattro dati:

```
X=[X,4]
```

```
X =
     1     2     3     4
```

```
Y=[Y,3.75]
```

```
Y =
    1.2200    1.4900    2.4500    3.7500
```

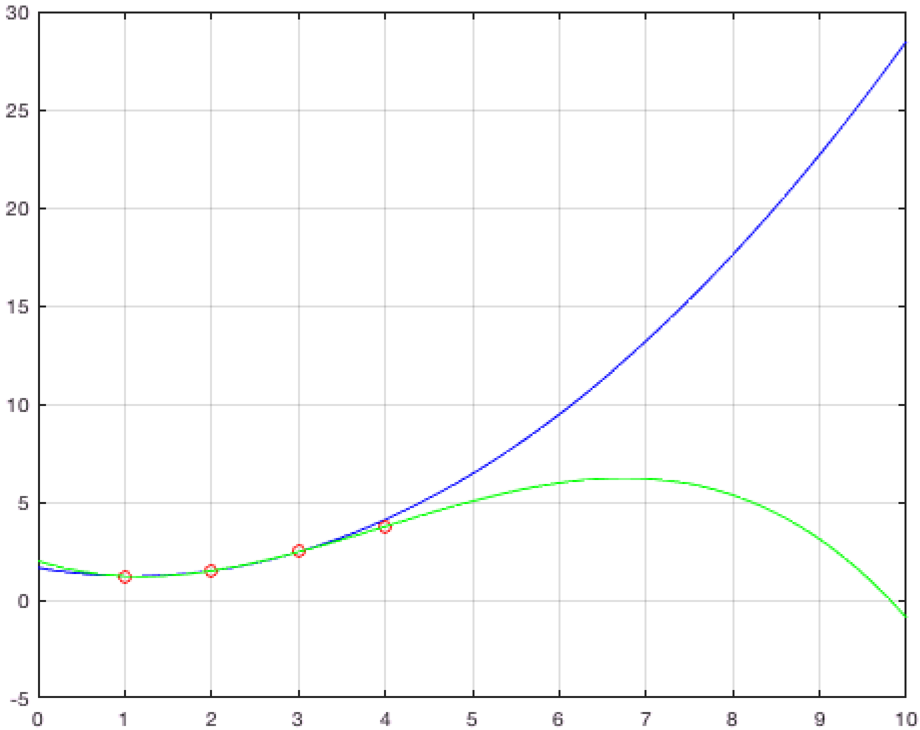
```
q=polyfit(X,Y,3);
p3=[x^3,x^2,x,1]*q'
```

```
p3 =
```

$$-\frac{7\,x^3}{120}+\frac{139\,x^2}{200}-\frac{211\,x}{150}+\frac{199}{100}$$

Rappresentiamo graficamente i quattro dati (con dei cerchi ROSSI), l'interpolazione dei primi tre dati (in BLU), e l'interpolazione di tutti e quattro i dati (in VERDE)

```
x=0:.1:10;
plot(x,polyval(p,x),'b')
hold on
grid on
plot(X,Y,'or')
plot(x,polyval(q,x),'g')
```



Vediamo che alla decima settimana il valore dell'azione nel modello cubico (in VERDE) sta scendendo drammaticamente, mentre nel modello quadratico (in BLU) cresce rapidamente.

In effetti il valore dell'azione alla decima settimana nel modello cubico è

```
polyval(q,10)
```

```
ans = -0.9100
```

mentre nel modello quadratico è

```
polyval(p,10)
```

```
ans = 28.4900
```

La loro differenza (in valore assoluto) è

```
abs(polyval(q,10)-polyval(p,10))
```

```
ans = 29.4000
```

Alla quinta settimana, invece la differenza non è poi così considerevole:

```
abs(polyval(q,5)-polyval(p,5))
```

```
ans = 1.4000
```

ESERCIZIO 9

```
A=sym([2 1 1; 1 2 1; 1 1 2])
```

A =

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A, determinando la tr(A), tr(A^2) e det(A)

```
trace(A)
```

ans = 6

```
trace(A^2)
```

ans = 18

```
det(A)
```

ans = 4

Il polinomio caratteristico di A è quindi

```
syms x
c(x)=x^3-trace(A)*x^2+1/2*(trace(A)^2-trace(A^2))*x-det(A)
```

c(x) = $x^3 - 6\,x^2 + 9\,x - 4$

Si poteva anche usare direttamente il comando (valido per ogni matrice quadrata) charpoly

```
charpoly(A,x)
```

ans = $x^3 - 6\,x^2 + 9\,x - 4$

Cerchiamo le radici di c tra i divisori di -4:

```
c(1)
```

ans = 0

Per cui 1 è un autovalore per A. Dividiamo c(x) per (x-1)

```
simplify(c(x)/(x-1))
```

ans = $x^2 - 5\,x + 4$

Le radici sono 4 e 1. Per cui c(x)=(x-1)^2(x-4)

```
simplify(c(x)/(x-1)^2)
```

ans = $x - 4$

e lo spettro di A è {1,4}. Troviamo una base ortonormale di autovettori di autovalore 1 (dato che A è simmetrica, è diagonalizzabile per il teorema spettrale e quindi 1 ha molteplicità geometrica uguale a due):

```
B=eye(3)-A
```

B =

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
N=null(B)
```

N =

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui una base di V_1(A) è composta dalle colonne di questa matrice N. Ortogonalizziamole:

```
X1=N(:,1)
```

X1 =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
X2=N(:,2)
```

X2 =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
F1=X1
```

F1 =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
a12=sym(X2'*F1)/sym(F1'*F1);
F2=X2-a12*F1
```

F2 =

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adesso normalizziamo i vettori F1 ed F2 trovati

```
N1=sqrt(sym(F1'*F1));
N2=sqrt(sym(F2'*F2));
E1=1/N1*F1
```

```
E1 =
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
E2=1/N2*F2
```

```
E2 =
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

{E1,E2} è una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore 1. Troviamo una base ortonormale dell'autospazio relativo all'autovalore 4:

```
D=4*eye(3)-A
```

```
D =
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
M=null(D)
```

```
M =
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
N3=sqrt(sym(M'*M));
E3=1/N3*M
```

```
E3 =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

{E1,E2,E3} è una base ortonormale di R^3 composta di autovettori per A. Consideriamo la matrice ortogonale P che li ha compe colonne:

```
P=[E1,E2,E3]
```

```
P =
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

otteniamo quindi una diagonalizzazione ortogonale di A:

```
P'*A*P
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$