Esercizi Di Geometria 1
Valori singolari, forme quadratiche, coniche

SETTIMANA 12
(11– 17 Dicembre 2017)

Esercizio 1. Sia $A = (a, b, c) \in \mathrm{Mat}_{1\times 3}(\mathbb{R})$. Si scrivanole matrici ${}^tAA$ e A^tA e se ne calcolino gli autovalori. Quali sono i valori singolari di A?

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Per calcolare i valori singolari di A conviene calcolare ${}^tAA$ oppure A^tA? Si derminino i valori singolari di A ed una sua sua decomposizione ai valori singolari. Qual'è la norma di A?

Esercizio 3. Trovare una decomposizione ai valori singolari delle matrici $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Calcolare il minimo ed il massimo valore di $R(X) = \frac{2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$. Trovare due vettori X_{min}, X_{max} di $\mathbb{R}^2$ tali che $R(X_{min})$ è il valore minimo ed $R(X_{max})$ è il valore massimo.

Esercizio 5. Ridurre in forma canonica affine ognuna delle seguenti coniche, specificando il cambiamento di coordinate:

1. $p(x, y) := x^2 + 4xy + 2y^2 - x - y - 1 = 0$
2. $p(x, y) := 3x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$
3. $p(x, y) := xy + x - 3y + 4 = 0$
4. $p(x, y) := 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
5. $p(x, y) := x^2 + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 9 = 0$

Esercizio 6. Di ognuna delle seguenti forme quadratiche stabilire se sia definita (positiva o negativa), semidefinita (positiva o negativa) o indefinita.

1. $x^2 - z^2 + 4xy - 2xz$,

2. $x^2 + 9z^2 - 6xz$,

3. $2x^2 + 2y^2 + 8xz + 4yz$,

4. $2x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 6yz$.

Esercizio 7. Decidere se le seguenti matrici sono o meno definite positive

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. Per quali valori di a e b le seguenti matrici sono definite positive?

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & b & 8 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Dimostrare che se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{R})$ è una matrice definita positiva, allora le componenti a_{ii} sulla diagonale principale di A sono necessariamente positive.

Esercizio 10. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Scrivere la forma quadratica ${}^tXAX$ associata ad A come somma di due quadrati e dedurre che A è semi–definita positiva.

Esercizio 11. Se $A = {}^tBB$ con B invertibile, dimostrare che A è definita positiva.