Esercizi Di Geometria 1
Spazi Vettoriali

SETTIMANA 13
(18– 24 Dicembre 2017)

Esercizio 1. Dimostrare che lo spazio vettoriale $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ ha dimensione mn, esibendone una base.

Esercizio 2. Dimostrare che i sottoinsiemi $Sym_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{A = {}^tA\}$ e $ASym_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{A = -{}^tA\}$ delle matricie $n \times n$ simmetriche e antisimmetriche rispettivamente, sono sottospazi vettoriali di $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che $\dim Sym_{n\times n}(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\dim ASym_{n\times n}(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$. Dimostrare che ogni matrice quadrata A si scrive (in maniera unica) come la somma di una matrice simmetrica e di una anti–simmetrica.

Esercizio 3. Trovare una trasformazione lineare $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ tale che

$$T(2) = 1 - x, \quad T(1 - x) = 1 + x, \quad T(2x + 3x^2) = x^4.$$

Esercizio 4. Sia $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2 e sia $A \in V$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri la funzione "commutatore con A" $T : V \to V$ definita da

$$T(B) = [A, B] := AB - BA.$$

Dimostrare che T è lineare. Trovare base e dimensione di Ker(A) e di Im(A).

Esercizio 5. Consideriamo la funzione $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

1. Mostrare che T é un'applicazione lineare;
2. Determinare il nucleo e l'immagine di T;
3. Determinare l'insieme $\{X \in \mathbb{R}^4 | \, T(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

4. Determinare l'immagine del sottospazio $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$;

5. Determinare l'insieme $\{X \in \mathbb{R}^4 | \, T(X) \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \}$

Esercizio 6. In ognuno dei seguenti casi dire se esiste (e se é unico) un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni date:

1.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Completare $\mathcal{B}$ ad una base di W:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \, x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

Esercizio 8. Scrivere la matrice del cambiamento di base $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}$ in $\mathbb{R}^3$ da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ dove

$$\mathcal{B}_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \quad \mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .\}$$

(Ricordarsi che tale matrice soddisfa il diagramma
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathbf{1}_3"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_B"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$
)

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$. Consideriamo l'endomorfismo lineare $T : V \to V$ definito da

$$T(v_1) = v_1, \quad T(v_2) = v_2 - v_1, \quad T(v_3) = v_3 - v_2 + v_1.$$

1. Scrivere la matrice che rappresenta T nella base $\mathcal{B}$;
2. Trovare una base $\mathcal{B}_2$ di V nella quale la matrice che rappresenta F nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_2$ sia l'dentitá.

Generalizzare questo esercizio come segue: sia $T : V \to W$ un *isomorfismo* lineare tra due spazi vettoriali V e W di dimensione finita. Dimostrare che data comunque una base $\mathcal{B}_1$ di V esiste una base $\mathcal{B}_2$ di W tale che la matrice che rappresenta T nella basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sia l'identitá.

Esercizio 10. Consideriamo le applicazioni lineari $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ date da

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La composizione $f \circ g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é un'applicazione lineare (dimostrare in generale che la composizione di applicazioni lineari é lineare). Scrivere la matrice che rappresenta $f \circ g$ nella base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 11. Consideriamo i polinomi $p_1(x) = x^2 - 2x$, $p_2(x) = 1 + 2x$, $p_3(x) = 2 - x^2$, $q_1(x) = -1 + x$, $q_2(x) = -1 + x - x^2$ e $q_3(x) = 2x + 2x^2$. Dimostrare che i due insiemi $\mathcal{B}_1 := \{p_1, p_2, p_3\}$ e $\mathcal{B}_2 := \{q_1, q_2, q_3\}$ sono basi dello spazio vettoriale $\mathbb{P}_2$ e trovare la matrice di cambiamento di base *da* $\mathcal{B}_1$ *a* $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 12. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo lineare rappresentato (rispetto alla base canonica) dalla seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Trovare la matrice che rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$.

Esercizio 13. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare la dimensione di $Ker f$ ed una sua base;
2. Completare la base trovata di Ker f ad una base di $\mathbb{R}^4$;
3. Dimostrare che esistono basi nelle quali f é rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 14. Consideriamo le matrici

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_4 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che sia l'insieme $\mathcal{B}_1 := \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ che l'insieme $\mathcal{B}_2 := \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ sono una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ delle matrici 2×2. Trovare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 15. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}$ le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Scrivere le matrici L, M associate rispettivamente agli endomorfismi $S_A, S_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle due basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

NB: Si ricordi che per definizione questo vuol dire che le matrici cercate devono rendere il seguente diagramma'

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_A, S_B"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_L, S_M"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

commutativo.