Nome, Cognome e Matricola

Esame di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

25 Gennaio 2019

Esercizio 1. *Sia r la retta di $\mathbb{R}^2$ ottenuta ruotando di $\pi/4$ in senso anti-orario la retta $y = 0$ (l'asse delle ascisse).*

1. *(2 punti) Sia Q il punto di r la cui proiezione ortogonale sull'asse delle ascisse è $P = (3, 0)^t$. Trovare il punto R ottenuto ruotando il punto P attorno a Q di un angolo di $\pi/3$ in senso anti-orario.*

2. *(1/2 punto) Calcolare il perimetro del triangolo di vertici P, Q, R.*

3. *(2 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici P, Q, R.*

4. *(1/2 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per P ed R.*

5. *(2 punti) Calcolare l'angolo tra la retta r e la retta s. In quale quadrante si trova $s \cap r$? Fare un disegno per illustrare la situazione.*

Esercizio 2. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane*

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Determinare una base e la dimensione di U.*
2. *(3 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su U.*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale su U di $Q = 12(1, -1, 1, -1)^t$.*
4. *(2 punti) Calcolare la distanza di $Q = 12(1, -1, 1, -1)^t$ da U.*

Esercizio 3. *Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice 3×3*

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k & 1 \\ k-1 & k-1 & -1 \\ k+1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(3 punti) Trovare tutti i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.*
2. *(2 punti) Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, trovare una base diagonalizzante $\mathcal{B}$, una matrice B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}A_kB = D$.*
3. *(2 punti) Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, calcolare A^{2n} per ogni $n \geq 1$.*

Esercizio 4. *Si consideri le seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Trovare una base di* $KerA$ *ed una base di* ImA*.*

2. *(1 punto) Dimostrare che* $\{v_1, v_2\}$ *è linearmente indipendente.*

3. *(1 punto) Usando il teorema di decomposizione ortogonale, trovare due vettori* $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ *tali che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *sia una base di* $\mathbb{R}^4$*.*

4. *(2 punti) Trovare la matrice* C *che rappresenta* $S_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *nella base* $\mathcal{B}$ *in partenza e nella base canonica in arrivo.*

5. *(2 punti) Si consideri il sottospazio* $U = \langle v_1 + v_2, v_2 + v_3 \rangle$*. Determinare una base di* $KerA \cap U$ *ed una base di* $KerA + U$*.*

Esercizio 5. *Si consideri il polinomio*

$$p(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 2.$$

1. *Trovare le matrici* A *e* b *tali che* $p(X) = X^t AX + 2B \cdot X + 2$.
2. *Ridurre a forma canonica metrica la conica* $\mathcal{C}_p$*, specificando i cambiamenti di coordinate.*
3. *Ridurre a forma canonica affine la conica* $\mathcal{C}_p$*, specificando i cambiamenti di coordinate.*