Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

19 Febbraio 2019

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali $x_1, \cdots, x_5$, dipendente dal parametro $k \in \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= k \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 &= k \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 &= -2k \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *(3 punti) Trovare i valori di k per i quali il sistema è compatibile.*
3. *(3 punti) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 & k \\ 2 & -2 & -1 & 5 & -1 & -2k \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 & 2k \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & -4k \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -\frac{4}{3}k \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right)$$

Il sistema è risolubile se e solo se $k=0$.

Se $k=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

le soluzioni sono

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_2 - 2x_4 + 2x_5 \\ x_2 \\ x_4 + 3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$*:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e che* $\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$.
2. *(1 punto) Si consideri l'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *data da*

   $$T(v_1) = w_1 - w_2, \quad T(v_2) = w_1 + w_2 - w_3, \quad T(v_3) = w_3 - 2w_1.$$

   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$.
3. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nelle basi standard.*
4. *(1 punto) Determinare una base del nucleo di* T.
5. *(1 punto) Determinare una base dell'immagine di* T.

Sol.: 1) $B_1 = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det B_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_1$ è lin. Ind. e quindi $\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbb{R}^3$, poiché $|\mathcal{B}_1| = 3$.

$B_2 = (w_1|w_2|w_3|w_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det B_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$

$\Rightarrow \mathcal{B}_2$ è lin. Ind. $\Rightarrow \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^4$, poiché $|\mathcal{B}_2| = 4$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B_1"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "B_2"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

$C = B_2 A B_1^{-1}$.

Calcoliamo B_1^{-1} con Cramer:

$c_{11} = 0 \quad c_{21} = -1 \quad c_{31} = 1$

$c_{12} = -1 \quad c_{22} = 1 \quad c_{32} = -1 \quad \Rightarrow B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$c_{13} = 1 \quad c_{23} = 0 \quad c_{33} = -1$

$$C = B_2 A B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) $$\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, C = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

5) $$\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Im}\, C = \langle C^1, C^2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare le molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tale che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.: 1) $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_4 - A) = \det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 & -4 \\ 1 & x+1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & x+3 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & x-6 \end{pmatrix}$

$= -\det\begin{pmatrix} 1 & x+1 & 2 & -4 \\ x & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & x+3 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & x-6 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & x+1 & 2 & -4 \\ 0 & 2-x^2-x & 2-2x & 4x-4 \\ 0 & 1-x & x+1 & -2 \\ 0 & 1-x & 1 & x-2 \end{pmatrix}$

$= -\det\begin{pmatrix} 2-x^2-x & 2-2x & 4x-4 \\ 1-x & x+1 & -2 \\ 1-x & 1 & x-2 \end{pmatrix} =$

$= -\det\begin{pmatrix} 2-x^2-x-(2-2x)(1-x) & 0 & 4x-4-(2-2x)(x-2) \\ 1-x-(x+1)(1-x) & 0 & -2-(x+1)(x-2) \\ 1-x & 1 & x-2 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 2-x^2-x-(2-4x+2x^2) & 4x-4-(2x-4-2x^2+4x) \\ (1-x)(1-x-1) & -2-(x^2-x-2) \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} -3x^2+3x & 2x^2-2x \\ -x(1-x) & -x(x-1) \end{pmatrix} = x(x-1)\det\begin{pmatrix} -3x^2+3x & 2x^2-2x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= x(x-1)(3x^2-3x-2x^2+2x) = x(x-1)(x^2-x) = x^2(x-1)^2$

2) $Sp(A) = \{0, 1\}$. $ma_A(0) = 2 = ma_A(1)$.

3) $V_0(A) = \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow mg_A(0) = 2$.

$V_1(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B^{-1}AB = D$.

Esercizio 4. *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per r_1 ed una forma cartesiana per r_2.*
2. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2 e calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*
3. *(2 punti) Determinare equazioni cartesiane per la retta r_3 avente le seguenti proprietà: 1) r_3 è ortogonale sia ad r_1 che a r_2; 2) r_3 interseca sia r_1 che r_2.*
4. *(1 punto) Determinare i punti $P_1 = r_1 \cap r_3$ e $P_2 = r_2 \cap r_3$.*
5. *(1 punto) Sia $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3. Fare un disegno illustrativo.*
6. *(1 punto) Sia $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_3 e P_4. Fare un disegno illustrativo.*

Sol.: 1) $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$; $r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$

2) $\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow r_1$ ed r_2 sono sghembe

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle : \quad x + y + z = 1$

$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle : \quad 2x + y + z = 1$

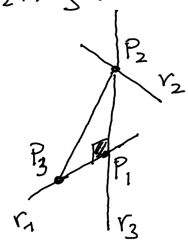
$\Rightarrow r_3 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r_3 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r_3 : \begin{cases} y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

$$r_3: \begin{cases} y+z=1 \\ x=0 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4) $P_1 = r_1 \cap r_3: \quad 1-2t=0 \iff t=\frac{1}{2} \implies P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$P_2 = r_2 \cap r_3: \quad 1-t=0 \iff t=1 \implies P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5)



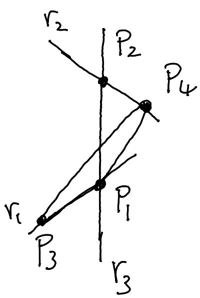
$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin r_3, \quad P_3 \in r_1$

$$\text{Area } \overset{\triangle}{P_3 P_1 P_2} = \frac{1}{2} \|P_3 - P_1\| \, \|P_2 - P_1\| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\| \operatorname{dist}(r_1, r_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \, \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

6)



$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin r_3 \quad P_4 \in r_2$

$$\text{Area}\left(\overset{\triangle}{P_3 P_1 P_4}\right) = \frac{1}{2} \left\| (P_3 - P_1) \wedge (P_4 - P_1) \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice $A \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

1. *(3 punti) Calcolare la decomposizione QR di A.*
2. *(1/2 punto) Utilizzare la decomposizione QR di A per calcolare il determinante di A. Dedurre che A è invertibile.*
3. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando la decomposizione QR.*
4. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando la formula di Cramer.*
5. *(1/2 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
6. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*

Sol.:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/2 \\ 1 & -1/3 & -1/2 \\ 1 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix};$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6+1-4}{6} \\ \frac{1-4}{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|F_1\| = \sqrt{3}, \quad \|F_2\| = \frac{1}{3}\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \|F_3\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \quad R=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{3}\sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $\det A = \det Q \det R = \det Q \ \frac{6}{6} = \det Q$

$$\det Q = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\, 3\cdot 2 = 1$$

$\Rightarrow \det A = 1$

3) $A^{-1} = R^{-1} Q^{-1} = R^{-1} Q^{t}$

Calcoliamo R^{-1} con Cramer:

$C_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad C_{21} = -\frac{2}{3}\sqrt{6}$ $\quad C_{31} = \frac{4}{3}\frac{3}{6}\cdot\sqrt{2} - \frac{2}{9}\cdot 3\sqrt{2} = 0$

$C_{22} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad C_{32} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \Rightarrow R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$C_{33} = \sqrt{2}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $C_{11} = 1 \quad C_{21} = 1 \quad C_{31} = -1$

$C_{12} = -1 \quad C_{22} = 0 \quad C_{32} = 1 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$C_{13} = 1 \quad C_{23} = -1 \quad C_{33} = 0$

5) $P_A(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}\left(9 - (3+2+2)\right)x - 1 = x^3 - 3x^2 + x - 1$

6) $A^3 - 3A^2 + A - \mathbb{1}_3 = 0 \Rightarrow A\,(A^2 - 3A + \mathbb{1}_3) = 0$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^2 - 3A + \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$