Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

19 Febbraio 2019

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali* $x_1, \cdots, x_5$*, dipendente dal parametro* $k \in \mathbf{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= k \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 &= k \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 &= -2k \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *(3 punti) Trovare i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile.*
3. *(3 punti) Per i valori di* k *per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$*:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e che* $\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$*.*

2. *(1 punto) Si consideri l'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *data da*

   $$T(v_1) = w_1 - w_2, \quad T(v_2) = w_1 + w_2 - w_3, \quad T(v_3) = w_3 - 2w_1.$$

   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$*.*

3. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nelle basi standard.*

4. *(1 punto) Determinare una base del nucleo di* T*.*

5. *(1 punto) Determinare una base dell'immagine di* T*.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare le molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tale che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad e \qquad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per r_1 ed una forma cartesiana per r_2.*

2. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2 e calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*

3. *(2 punti) Determinare equazioni cartesiane per la retta r_3 avente le seguenti proprietà: 1) r_3 è ortogonale sia ad r_1 che a r_2; 2) r_3 interseca sia r_1 che r_2.*

4. *(1 punto) Determinare i punti $P_1 = r_1 \cap r_3$ e $P_2 = r_2 \cap r_3$.*

5. *(1 punto) Sia $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3. Fare un disegno illustrativo.*

6. *(1 punto) Sia $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_3 e P_4. Fare un disegno illustrativo.*

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice* $A \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

1. *(3 punti) Calcolare la decomposizione QR di A.*
2. *(1/2 punto) Utilizzare la decomposizione QR di A per calcolare il determinante di A. Dedurre che A è invertibile.*
3. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando la decomposizione QR.*
4. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando la formula di Cramer.*
5. *(1/2 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
6. *(1 punto) Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*