Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

19 Giugno 2019

Esercizio 1. *Siano* $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2, \cdot)$.

1. *(1 punto) Dimostrare che P_1, P_2 e P_3 non sono allineati.*
2. *(2 punti) Calcolare un' equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i tre punti P_1, P_2 e P_3.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per P_1 e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$.*
4. *(2 punti) Trovare tutti i punti P diversi da P_3 della circonferenza $\mathcal{C}$ tali che la retta passante per P e P_3 formi un angolo di $\pi/4$ con la retta r.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3.*

Sol.: 1) I vettori $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti poiché $\det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$. Ne segue che P_1, P_2, P_3 non sono allineati.

2) Cerchiamo il centro $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ed il raggio r di $\mathcal{C}$:

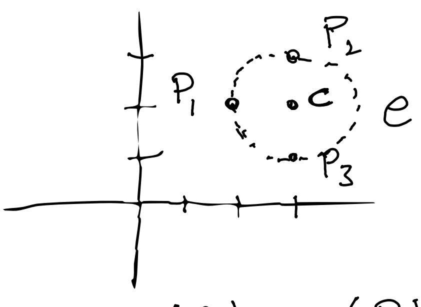
$$\begin{cases} \|P_1 - C\|^2 = \|P_2 - C\|^2 & (1) \\ \|P_3 - C\|^2 = \|P_2 - C\|^2 & (2) \\ \|P_2 - C\|^2 = r^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} (c_1-2)^2 + (c_2-2)^2 = (c_1-3)^2 + (c_2-3)^2 \\ (c_1-3)^2 + (c_2-1)^2 = (c_1-3)^2 + (c_2-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{c_1^2} - 4c_1 + 4 + \cancel{c_2^2} - 4c_2 + 4 = \cancel{c_1^2} - 6c_1 + 9 + \cancel{c_2^2} - 6c_2 + 9 \\ \cancel{c_1^2} - 6c_1 + 9 + \cancel{c_2^2} - 2c_2 + 1 = \cancel{c_1^2} - 6c_1 + 9 + \cancel{c_2^2} - 6c_2 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + 2c_2 = 10 \\ 4c_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 = 6 \\ c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r^2 = \|P_2 - C\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 1 \Rightarrow \boxed{\mathcal{C}: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1}$$



3) $\boxed{r : x = 2}$ $\qquad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4) Sia $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$. Allora $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$

La retta per P e P_3 ha eq. parametrica

$$P_3 + \left\langle \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

L'angolo che questa retta forma con r ha coseno

$$\pm \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}} = \pm \frac{(y-1)}{\sqrt{1-(y-2)^2+(y-1)^2}} = \pm \frac{(y-1)}{\sqrt{1-y^2+4y-4+y^2-2y+1}}$$

$$= \pm \frac{(y-1)}{\sqrt{2y-2}} = \pm \frac{(y-1)}{\sqrt{2}\sqrt{y-1}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(y-1)}{\sqrt{y-1}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{y-1}$$

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per cui si deve avere $\sqrt{y-1} = 1 \iff y = 2$

$P = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \iff (x-3)^2 = 1 \iff x-3 = \pm 1$

$\iff P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ oppure $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

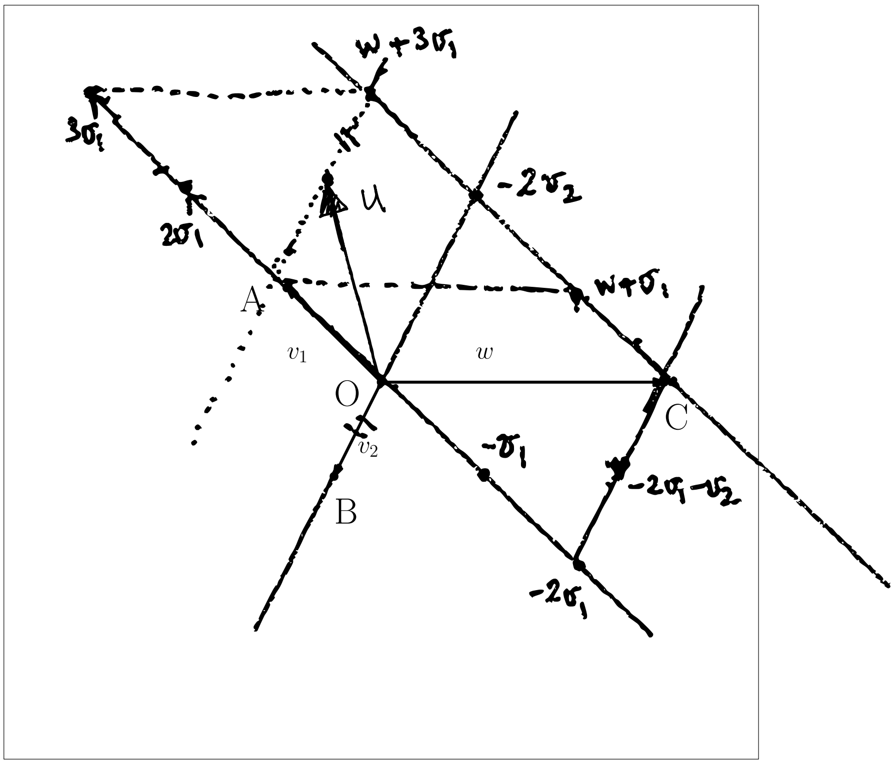
I punti cercati sono quindi $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5) Poniamo $\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{P}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Allora

$$\text{Area } \overset{\triangle}{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \left\| (\hat{P}_2 - \hat{P}_1) \times (\hat{P}_3 - \hat{P}_1) \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

Esercizio 2. *Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^2$ dei vettori geometrici del piano applicati al punto O si considerino i tre vettori $v_1 = \vec{OA}$, $v_2 = \vec{OB}$ e $w = \vec{OC}$ mostrati in figura:*



1. *(1 punto) Disegnare il vettore $u = (w + 3v_1) + v_2$.*

2. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathcal{V}_O^2$.*

3. *(2 punti) Sapendo che le coordinate di w nella base $\mathcal{B}$ sono intere, calcolare il vettore $X = F_{\mathcal{B}}(w) \in \mathbb{R}^2$ formato da tali coordinate.*

4. *(2 punti) Sapendo che le coordinate di u nella base $\mathcal{B}$ sono intere, calcolare il vettore $Y = F_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{R}^2$ formato da tali coordinate.*

5. *(1 punto) Calcolare l'angolo tra X e Y in $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.*

2) $\mathcal{B}$ è una base perché $\dim \mathcal{V}_0^2 = 2$ e v_1 e v_2 sono lin. indipendenti poiché i punti O, A, B non sono allineati.

3) $w = -2v_1 - 2v_2$, per cui $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) $u = v_1 - v_2$, per cui $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

5) $\cos XY = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} = 0 \Rightarrow$ l'angolo è di $90°$.

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *sono basi di* $\mathbb{R}^3$.
2. *(1 punto) Sia* $U = \langle v_1, w_1 \rangle$ *il sottospazio vettoriale generato da* v_1 *e da* w_1 *e sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la proiezione ortogonale su* U*. Scrivere la matrice* A *che rappresenta* T *nella base standard di* $\mathbb{R}^3$.
3. *(2 punti) Scrivere la matrice* B *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}_1$ *(in partenza ed in arrivo).*
4. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}_1$ *in partenza e nella base* $\mathcal{B}_2$ *in arrivo.*
5. *(1 punto) Trovare base e dimensione del nucleo e dell'immagine di* T.

Sol.: 1) $\det(v_1|v_2|v_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_1$ è lin. IND.

$\det(w_1|w_2|w_3) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ è lin. Ind.

Poiché $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = |\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$ ne segue che $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ generano $\mathbb{R}^3$ e quindi sono una base.

2) Poiché $U = \langle v_1, w_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$, $T(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -4v_1 + v_2$. Per cui

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, Rightarrow, "="] \arrow[d, "F_{B_1}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, Rightarrow, "="'] \arrow[d, "F_{B_2}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "B_1"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B_2"]
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = B_2^{-1} A B_1} . \quad AB_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_2 \mid AB_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1/5 & 7/5 & 11/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 6/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 3/5 & -1/5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 6/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 3/5 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2/5 & 6/5 & -2/5 \\ 1/5 & 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$ Verifichiamo:

$T(v_1) = v_1 \qquad -1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$T(v_2) = v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$T(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

5) $\operatorname{Ker} T = \langle e_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle . \quad \operatorname{Im} T = \langle e_1, e_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 6 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(3 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(3 punti) Trovare una matrice B ortogonale ed una matrice D diagonale tali che $B^tAB = D$.*

Sol.: 1) $A = A^t$

2) $$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-5 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & x-6 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & x-5 \end{pmatrix} = (x-4)\det \begin{pmatrix} x-5 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & x-6 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & x-5 \end{pmatrix}$$

$$= (x-4)\det \begin{pmatrix} x-4 & 0 & x-4 \\ \sqrt{2} & x-6 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & x-5 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-4)\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & x-4 \\ 2\sqrt{2} & x-6 & -\sqrt{2} \\ 6-x & -\sqrt{2} & x-5 \end{pmatrix} = (x-4)^2 \det \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & x-6 \\ 6-x & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= (x-4)^2\left(-4 + (x-6)^2\right) = (x-4)^2\left(x^2 - 12x + 32\right) = (x-4)^3(x-8)$$

3) $Sp(A) = \{4, 8\}$.

$$V_8(A) = Ker(8\mathbb{1}_4 - A) = Ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$= Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{2} & -8 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \leftarrow \text{ha norma } 1$$

Poiché $A = A^t$, autospazi corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali. Quindi:

$V_4(A) = V_8(A)^\perp$ ha eq. cartesiana $-x_1 + \sqrt{2}x_3 + x_4 = 0$

ovvero
$$x_1 = \sqrt{2}\,x_3 + x_4$$

Una sua base è quindi $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Notiamo che v_1 è ortogonale sia a v_2 che a v_3.

Per cui dobbiamo solo ortogonalizzare $\{v_2, v_3\}$:

$$v_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base ortogonale di $V_4(A)$ è

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Una base ortonormale di $V_4(A)$ è

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Poniamo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 3/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

e otteniamo

$$B^t A B = D.$$

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice* 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* A *è invertibile.*
2. *(2 punti) Calcolare l'inversa di* A *con l'algoritmo di inversione.*
3. *(2 punti) Calcolare l'inversa di* A *mediante il teorema di Cramer.*
4. *(2 punti) Calcolare l'inversa di* A *mediante il teorema di Cayley-Hamilton.*

Sol.: 1) $\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -15 \neq 0$

$\Rightarrow A$ è invertibile.

2) $(A|\mathbb{1}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \cancel{+}1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/15 & 0 & 3/15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/15 & -1 & 18/15 \\ 0 & 1 & 0 & -2/15 & 0 & 3/15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1 & 6/5 \\ -2/15 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) $A^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -3 & 15 & -18 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -15 & 15 \end{pmatrix}$

4) $P_A(x) = x^3 - 8x^2 + \frac{1}{2}\left(64 - (9+12+19)\right)x + 15 =$

$= x^3 - 8x^2 + 12x + 15 \underset{\text{Cayley Hamilton}}{\Rightarrow} A\left(A^2 - 8A + 12\mathbb{1}_3\right) = -15\mathbb{1}_3$

$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{15}\left(A^2 - 8A + 12\mathbb{1}_3\right)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 6 \\ 18 & 12 & 21 \\ 16 & 9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 8A + 12\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 6 \\ 18 & 12 & 21 \\ 16 & 9 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & -24 & 24 \\ 16 & 24 & 24 \\ 16 & 24 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 15 & -18 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -15 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -3 & 15 & -18 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -15 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1 & 6/5 \\ -2/15 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$