Nome, Cognome e Matricola

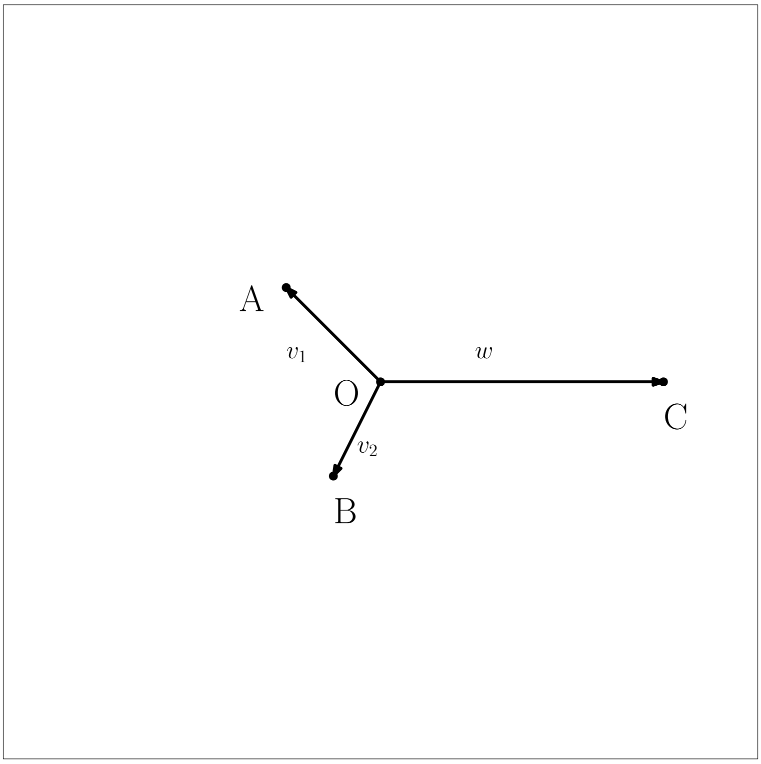
Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

19 Giugno 2019

Esercizio 1. *Siano* $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2, \cdot)$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* P_1, P_2 *e* P_3 *non sono allineati.*
2. *(2 punti) Calcolare un' equazione cartesiana della circonferenza* $\mathcal{C}$ *passante per i tre punti* P_1, P_2 *e* P_3*.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della retta* r *passante per* P_1 *e tangente alla circonferenza* $\mathcal{C}$*.*
4. *(2 punti) Trovare tutti i punti* P *diversi da* P_3 *della circonferenza* $\mathcal{C}$ *tali che la retta passante per* P *e* P_3 *formi un angolo di* $\pi/4$ *con la retta* r*.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici* P_1, P_2 *e* P_3*.*

Esercizio 2. *Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^2$ dei vettori geometrici del piano applicati al punto O si considerino i tre vettori $v_1 = \vec{OA}$, $v_2 = \vec{OB}$ e $w = \vec{OC}$ mostrati in figura:*



1. *(1 punto) Disegnare il vettore $u = (w + 3v_1) + v_2$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathcal{V}_O^2$.*
3. *(2 punti) Sapendo che le coordinate di w nella base $\mathcal{B}$ sono intere, calcolare il vettore $X = F_{\mathcal{B}}(w) \in \mathbb{R}^2$ formato da tali coordinate.*
4. *(2 punti) Sapendo che le coordinate di u nella base $\mathcal{B}$ sono intere, calcolare il vettore $Y = F_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{R}^2$ formato da tali coordinate.*
5. *(1 punto) Calcolare l'angolo tra X e Y in $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.*

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *sono basi di* $\mathbb{R}^3$.
2. *(1 punto) Sia* $U = \langle v_1, w_1 \rangle$ *il sottospazio vettoriale generato da* v_1 *e da* w_1 *e sia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la proiezione ortogonale su* U*. Scrivere la matrice* A *che rappresenta* T *nella base standard di* $\mathbb{R}^3$.
3. *(2 punti) Scrivere la matrice* B *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}_1$ *(in partenza ed in arrivo).*
4. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}_1$ *in partenza e nella base* $\mathcal{B}_2$ *in arrivo.*
5. *(1 punto) Trovare base e dimensione del nucleo e dell'immagine di* T.

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 6 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(3 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(3 punti) Trovare una matrice B ortogonale ed una matrice D diagonale tali che $B^t AB = D$.*

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice* 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è invertibile.*
2. *(2 punti) Calcolare l'inversa di A con l'algoritmo di inversione.*
3. *(2 punti) Calcolare l'inversa di A mediante il teorema di Cramer.*
4. *(2 punti) Calcolare l'inversa di A mediante il teorema di Cayley-Hamilton.*