Nome, Cognome e Matricola

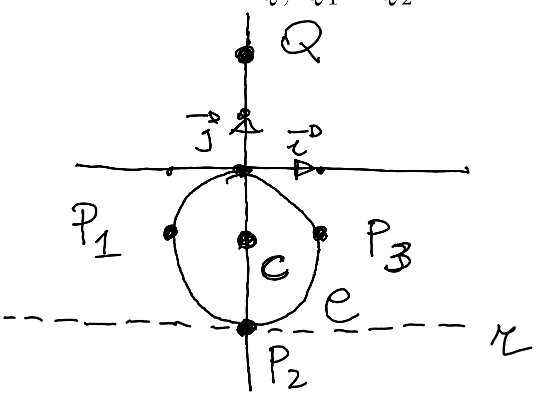
Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

12 Luglio 2019

Esercizio 1. *Siano* $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2, \cdot)$.

1. *(1 punto) Dimostrare che P_1, P_2 e P_3 non sono allineati.*
2. *(2 punti) Calcolare un' equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i tre punti P_1, P_2 e P_3.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per P_2 e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$.*
4. *(2 punti) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane delle rette r_1 ed r_2 passanti per il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e tangenti alla circonferenza $\mathcal{C}$.*
5. *(1 punto) Siano $Q_1 = r_1 \cap r$ e $Q_2 = r_2 \cap r$. Calcolare l'area del triangolo di vertici Q, Q_1 e Q_2.*

Sol.:



1. $\det\left(\overrightarrow{P_2P_1} \mid \overrightarrow{P_2P_3}\right) = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$

2. $\mathcal{C}: \; x^2 + (y+1)^2 = 1$

3. $r: \; y = -2$ (Eq. cart.)

$r = \overrightarrow{OP_2} + \langle \vec{i} \rangle$ (Eq. par.)

4. Le rette r_1 ed r_2 non sono parallele all'asse $y=0$ per cui sono della forma $y = mx + 2$.

$$\begin{cases} y = mx+2 \\ x^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases} \iff x^2 + (mx+3)^2 = 1$$

$$\iff x^2 + m^2x^2 + 6mx + 9 = 1$$

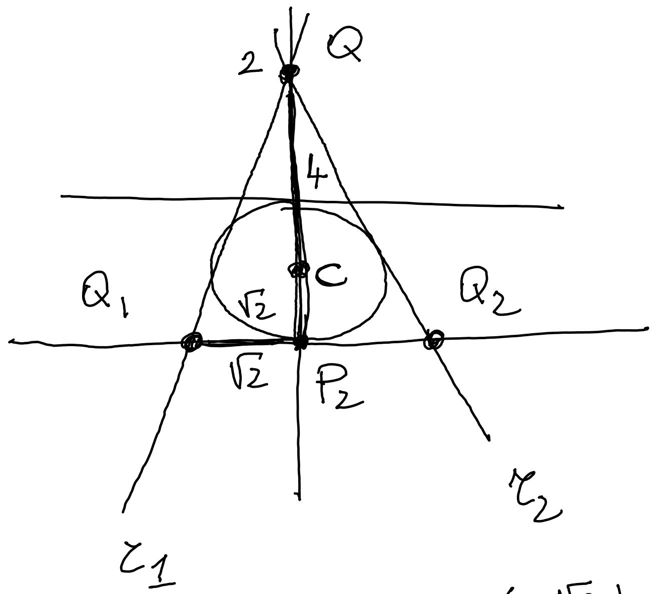
$$\iff (m^2+1)x^2 + 6mx + 8 = 0$$

Questa equazione ha un'unica soluzione se e solo se

$$36m^2 - 4(m^2+1)8 = 0 \iff 4m^2 - 32 = 0$$

$$\iff m = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

$r_1: \quad y = 2\sqrt{2}\,x + 2 \qquad r_2: \quad y = -2\sqrt{2}\,x + 2$



5. $Q_1 = \begin{cases} y = -2 \\ y = 2\sqrt{2}\,x + 2 \end{cases} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$; $Q_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

Il triangolo è isoscele ed ha area:

$\|Q - P_2\| \, \|Q_1 - P_2\| = \sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2}$

Esercizio 2. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane per $Im(A)$.*
2. *(3 punti) Calcolare la decomposizione QR di A.*
3. *(2 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su $Im(A)$.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto $P = (3, 3, 3, 1)^t$ da $Im(A)$.*

Sol.: 1. $\operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \operatorname{Im} A = \operatorname{Ker}(A^t)^\perp : \; -x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (Eq. cart. di Im A)

Da qui ricaviamo una base per Im A:

$\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (Eq. par. di Im A).

2. $Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$F_1 = A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F_2 = A^2 - \alpha_{12} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_3 = A^3 - \alpha_{13} F_1 - \alpha_{23} F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_4 = A^4 - \alpha_{14} F_1 - \alpha_{24} F_2 - \alpha_{34} F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} F_1 - \frac{3/2}{3/2} F_2 - 0\, F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\|F_2\|} F_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|F_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$QR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \quad \checkmark$$

3. La matrice di proiezione ortogonale su $\operatorname{Im} A$ è

$$QQ^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2\sqrt{3} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $$pr_{\operatorname{Im} A}(P) = QQ^t P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{dist}(P, \operatorname{Im} A) = \| P - pr_{\operatorname{Im} A}(P) \| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}.$$

Esercizio 3. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di 2. Denotiamo con* $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ *la base standard di* V*. Si consideri l'insieme* $\mathcal{B} = \{1 - x, 2 + x, x + x^2\}$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* V.
2. *(1 punto) Sia* $T : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*
$$T(1 - x) = 1 + x + x^2, \quad T(2 + x) = 2 - x, \quad T(x + x^2) = 3x + 2x^2.$$
Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}$ *in partenza e nella base* $\mathcal{C}$ *in arrivo.*
3. *(1 punto) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per* $\operatorname{Ker}(T)$.
5. *(1 punto) Trovare una base per* $\operatorname{Im}(T)$.
6. *(2 punti) Stabilire se esiste un polinomio non-nullo* $p(x)$ *tale che* $T(p(x)) = p(x)$ *e nel caso esista trovarne uno.*

Sol.: 1. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$C = AB^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

4. $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \langle 4x + x^2 \rangle$

5. $\operatorname{Im} C = \langle C^1, C^2 \rangle \Rightarrow \operatorname{Im} T = \langle 3 + x^2, 3x + 2x^2 \rangle$

6. Si chiede se 1 è un autovalore di T:

$$\det(\mathbb{1}_3 - C) = \det\left(\mathbb{1}_3 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1 \in Sp(C) = Sp(T)$$

$$V_1(C) = \operatorname{Ker}(\mathbb{1} - C) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Il polinomio $p(x) = -1 + 2x + x^2$ è un autovettore di autovalore 1 per T.

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice* 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Stabilire se* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.
2. *(3 punti) Trovare, se esistono, una matrice invertibile* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^{-1}AB = D$.
3. *(2 punto) Calcolare l'inversa di* A *mediante il teorema di Cayley-Hamilton.*

[redacted]

Sol.: 1. $P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & -3 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -2 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x+1)\left[(x-1)(x-2)-6\right] =$

$= (x+1)(x^2-3x-4) = (x+1)^2(x-4)$

$Sp(A) = \{-1, 4\} \subset \mathbb{R}$. $ma_A(4) = mg_A(4) = 1$;

$mg_A(-1) = \dim Ker(-\mathbb{1} - A) = \dim Ker\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \dim Ker($

$= \dim Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 = ma_A(-1) =$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

2. $V_{-1}(A) = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_4(A) = Ker\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. $$P_A(x) = (x+1)^2(x-4) = (x^2+2x+1)(x-4) =$$

$$= x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x + x - 4$$

$$= x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

$$\underset{\substack{\text{Cayley}\\\text{Hamilton}}}{P_A(A) = 0} \Rightarrow A(A^2 - 2A - 7) = 4\,\mathbb{1}_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - 2A - 7\mathbb{1}\right)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix} -$$

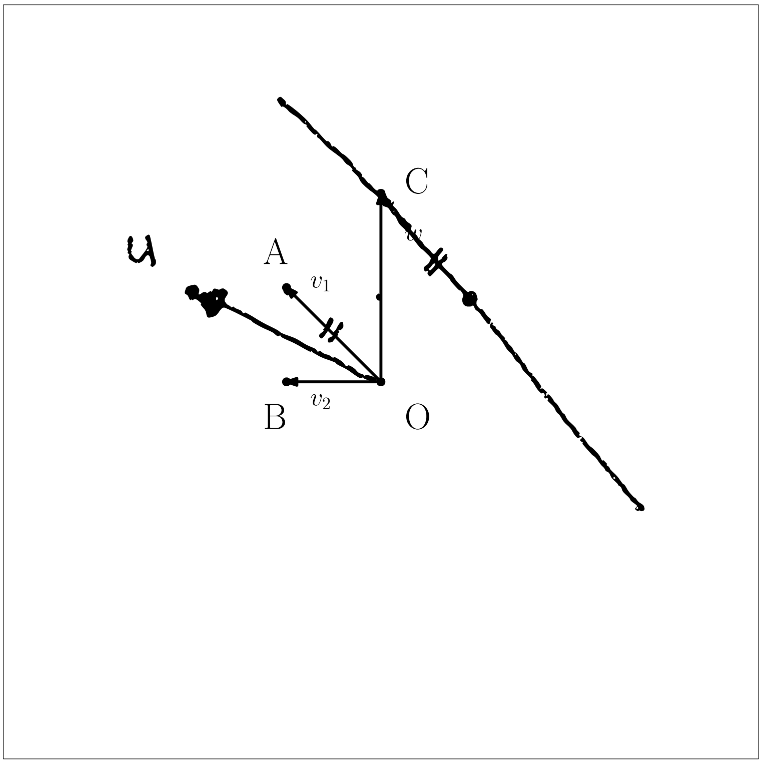
$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. *Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^2$ dei vettori geometrici del piano applicati al punto O si considerino i tre vettori $v_1 = \vec{OA}$, $v_2 = \vec{OB}$ e $w = \vec{OC}$ mostrati in figura:*



1. *(1 punto) Disegnare il vettore $u = (w - v_1) + 3v_2$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathcal{V}_O^2$.*
3. *(2 punti) Sapendo che le coordinate di w nella base $\mathcal{B}$ sono intere, calcolare il vettore $X = F_{\mathcal{B}}(w) \in \mathbb{R}^2$ formato da tali coordinate.*
4. *(2 punti) Sapendo che le coordinate di u nella base $\mathcal{B}$ sono intere, calcolare il vettore $Y = F_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{R}^2$ formato da tali coordinate.*
5. *(1 punto) Calcolare l'angolo tra X e Y in $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.*

2. O, A, B non sono allineati

3. $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 4. $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5. $X \cdot Y = 0 \Rightarrow$ angolo è $90°$