Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

12 Luglio 2019

Esercizio 1. *Siano* $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2, \cdot)$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* P_1, P_2 *e* P_3 *non sono allineati.*
2. *(2 punti) Calcolare un' equazione cartesiana della circonferenza* $\mathcal{C}$ *passante per i tre punti* P_1, P_2 *e* P_3.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della retta* r *passante per* P_2 *e tangente alla circonferenza* $\mathcal{C}$.
4. *(2 punti) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane delle rette* r_1 *ed* r_2 *passanti per il punto* $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e tangenti alla circonferenza* $\mathcal{C}$.
5. *(1 punto) Siano* $Q_1 = r_1 \cap r$ *e* $Q_2 = r_2 \cap r$. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* Q, Q_1 *e* Q_2.

Esercizio 2. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane per $Im(A)$.*
2. *(3 punti) Calcolare la decomposizione QR di A.*
3. *(2 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su $Im(A)$.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto $P = (3, 3, 3, 1)^t$ da $Im(A)$.*

Esercizio 3. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di* 2. *Denotiamo con* $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ *la base standard di* V. *Si consideri l'insieme* $\mathcal{B} = \{1 - x, 2 + x, x + x^2\}$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* V.
2. *(1 punto) Sia* $T : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*

   $$T(1 - x) = 1 + x + x^2, \quad T(2 + x) = 2 - x, \quad T(x + x^2) = 3x + 2x^2.$$

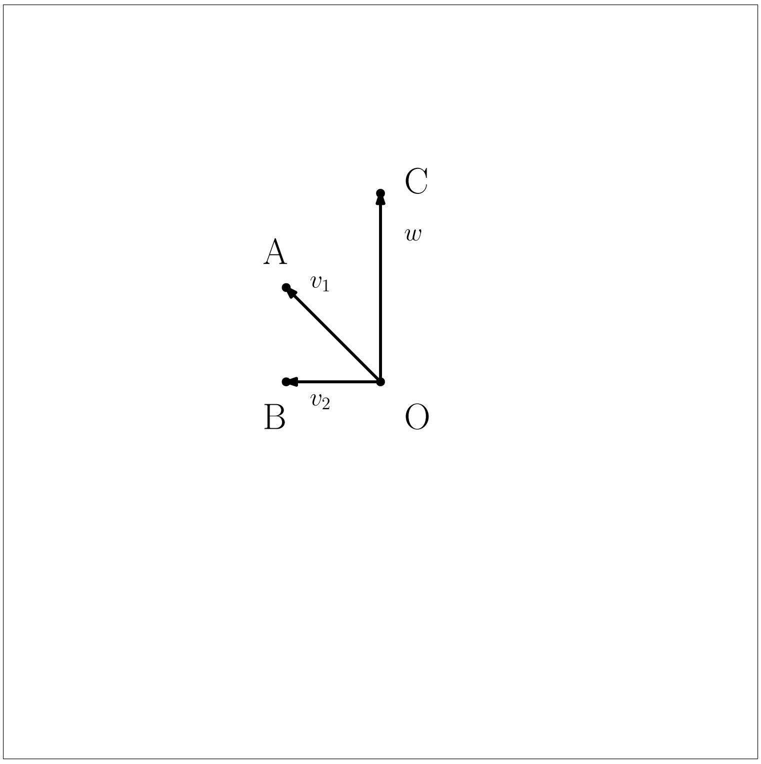
   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}$ *in partenza e nella base* $\mathcal{C}$ *in arrivo.*
3. *(1 punto) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Ker}(T)$.
5. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Im}(T)$.
6. *(2 punti) Stabilire se esiste un polinomio non-nullo* $p(x)$ *tale che* $T(p(x)) = p(x)$ *e nel caso esista trovarne uno.*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice* 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Stabilire se* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.
2. *(3 punti) Trovare, se esistono, una matrice invertibile* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^{-1}AB = D$.
3. *(2 punti) Dimostrare che* A *è invertibile e calcolare la sua inversa.*

Esercizio 5. *Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^2$ dei vettori geometrici del piano applicati al punto O si considerino i tre vettori $v_1 = \vec{OA}$, $v_2 = \vec{OB}$ e $w = \vec{OC}$ mostrati in figura:*



1. *(1 punto) Disegnare il vettore $u = (w - v_1) + 3v_2$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathcal{V}_O^2$.*
3. *(2 punti) Sapendo che le coordinate di w nella base $\mathcal{B}$ sono intere, calcolare il vettore $X = F_{\mathcal{B}}(w) \in \mathbb{R}^2$ formato da tali coordinate.*
4. *(2 punti) Sapendo che le coordinate di u nella base $\mathcal{B}$ sono intere, calcolare il vettore $Y = F_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{R}^2$ formato da tali coordinate.*
5. *(1 punto) Calcolare l'angolo tra X e Y in $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.*