Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

13 Settembre 2019

Esercizio 1. *Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ quattro numeri reali tali che $bc > 0$.*

1. *(4 punti) Dimostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
2. *(3 punti) Stabilire se la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.*

Sol. : 1) Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$$

il cui discriminante è

$$\Delta = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc \geqslant bc > 0$$

Ne segue che A ha due autovalori reali e distinti e quindi è diagonalizzabile.

2) L'immagine di B è $< \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} >$ ed il nucleo è $< \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} >$ ovvero $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} B = < \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} >$.

Quindi B ha il solo autovalore 0 con molteplicità geometrica 1. Ne segue che B non è diagonalizzabile.

Si poteva vedere anche algebricamente:

$$P_B(x) = x^2, \quad V_0(B) = \operatorname{Ker} B = < \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} >.$$

Esercizio 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ due basi di V. Sia $T : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$T(v_1) = -w_1 + w_2 + w_3, \quad T(v_2) = -w_1 + w_2 + 2w_3, \quad T(v_3) = w_2 - w_3.$$

1. *(1 punto) Trovare la matrice A che rappresenta T nelle basi $\mathcal{B}_1$ in partenza e $\mathcal{B}_2$ in arrivo.*

2. *(2 punti) Calcolare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine di T.*

3. *(4 punti) Stabilire se T è invertibile e nel caso lo sia trovare l'inversa.*

<u>Sol.</u>: 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rref} A$

$\Rightarrow$ A è invertibile $\Rightarrow$ $\text{Ker} A = \{0\}$, $\text{Im} A = \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ T è invertibile, $\text{Ker}\, T = \{0\}$, $\text{Im}\, T = V$.

3. Calcoliamo A^{-1} con Cramer:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = +1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia S l'inversa di T. Allora S è l'unica applicazione lineare tale che:

$S(w_1) = -3v_1 + 2v_2 + v_3$, $S(w_2) = -v_1 + v_2 + v_3$, $S(w_3) = -v_1 + v_2$,

Esercizio 3. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*

2. *(5 punti) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t AB = D$.*

<u>Sol.</u>: 1) $A = A^t$ e per il Teorema spettrale é ortogonalmente diagonalizzabile.

2) $$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ 0 & x+1 & 0 \\ -2 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x+1)\left[(x-1)^2 - 4\right] = (x+1)(x^2-2x-3)$$

$$= (x+1)^2(x-3)$$

$$V_{-1}(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

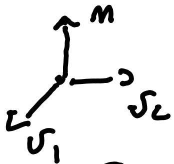
Esercizio 4. *Si considerino le seguenti rette affini di* $\mathbb{R}^3$*:* $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calcolare il prodotto vettoriale* $n = v_1 \wedge v_2$ *e la sua norma. Fare un disegno per illustrare verso e direzione di* n *rispetto a* v_1 *e* v_2.
2. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $0, v_1, v_2$ *(qui* v_1 *e* v_2 *sono pensati come punti).*
3. *Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2.
4. *Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.
5. *Trovare la proiezione ortogonale di* P *sulla retta* r_1 *(ovvero il punto di* r_1 *più vicino a* P*) e denominarla* Q_1.
6. *Trovare la proiezione ortogonale di* P *sulla retta* r_2 *(ovvero il punto di* r_2 *più vicino a* P*) e denominarla* Q_2.
7. *Calcolare la distanza tra* P *ed* r_1 *e tra* P *ed* r_2.

Sol.: 1) $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



2) $\|n\| = \sqrt{6} \Rightarrow$ Area del Triangolo è $\frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\det(P_2 - P_1 | v_1 | v_2) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ sghembe.

4) $\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \operatorname{dist}(P_2 - P_1, \langle v_1, v_2 \rangle) = \frac{|(P_2 - P_1) \cdot n|}{\|n\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

5) $Q_1 = P_1 + \frac{(P - P_1) \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) $Q_2 = P_2 + \frac{(P - P_2) \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7) $\operatorname{dist}(P, r_1) = \|P - Q_1\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\operatorname{dist}(P, r_2) = \|P - Q_2\| = \sqrt{2}$

Esercizio 5. *Si considerino i seguenti sistemi lineari (il primo nelle cinque variabili $x_1, \cdots, x_5$ ed il secondo nelle tre variabili x, y, z):*

$$a) \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 6x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 5 \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + z = 1 \\ \sqrt{2}x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + y = -3 \\ x = -6 \\ 2y = 3 \end{cases}$$

1. *Stabilire se il sistema a) è risolubile.*
2. *Stabilire se il sistema b) è risolubile.*
3. *Se il sistema a) è risolubile, calcolare tutte le sue soluzioni. Altrimenti calcolare tutte le sue soluzioni approssimate.*
4. *Se il sistema a) è risolubile, calcolare tutte le sue soluzioni. Altrimenti calcolare tutte le sue soluzioni approssimate.*

Sol.:

1) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -3 & 2 & 1 & -6 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & -5 & -3 & 8 & 4 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 6 & -5 & -13 & -6 \\ 2 & -2 & -4 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & -5 & -3 & 8 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 6 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & -16 & 16 & 33 & 17 \\ 0 & 0 & -33 & 33 & 69 & 36 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 6 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & -16 & 16 & 33 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 6 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -16 & 16 & 33 & 17 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 6 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & -15 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 6 & -5 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 6 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$ Il sistema (a) è risolubile

3) le sue soluzioni sono $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

Il sistema (b) è incompatibile.

4) $$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema $A^t A Z = A^t b$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow Z = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione approssimata, ovvero t.c.

$$AZ = pr_{\mathrm{Im}A}(b)$$