Nome, Cognome e matricola

13 Settembre 2019

Esercizio 1. *Siano* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *quattro numeri reali tali che* $bc > 0$.

1. *(4 punti) Dimostrare che la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.

2. *(3 punti) Stabilire se la matrice* $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ *è diagonalizzabile.*

Esercizio 2. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione* 3 *e siano* $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *e* $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ *due basi di* V. *Sia* $T : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$T(v_1) = -w_1 + w_2 + w_3, \quad T(v_2) = -w_1 + w_2 + 2w_3, \quad T(v_3) = w_2 - w_3.$$

1. *(1 punto) Trovare la matrice* A *che rappresenta* T *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *in partenza e* $\mathcal{B}_2$ *in arrivo.*
2. *(2 punti) Calcolare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine di* T.
3. *(4 punti) Stabilire se* T *è invertibile e nel caso lo sia trovare l'inversa.*

Esercizio 3. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(5 punti) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t AB = D$.*

Esercizio 4. *Si considerino le seguenti rette affini di* $\mathbb{R}^3$*:* $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calcolare il prodotto vettoriale* $n = v_1 \wedge v_2$ *e la sua norma. Fare un disegno per illustrare verso e direzione di* n *rispetto a* v_1 *e* v_2*.*
2. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $0, v_1, v_2$ *(qui* v_1 *e* v_2 *sono pensati come punti).*
3. *Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*.*
4. *Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*
5. *Trovare la proiezione ortogonale di* P *sulla retta* r_1 *(ovvero il punto di* r_1 *più vicino a* P*) e denominarla* Q_1*.*
6. *Trovare la proiezione ortogonale di* P *sulla retta* r_2 *(ovvero il punto di* r_2 *più vicino a* P*) e denominarla* Q_2*.*
7. *Calcolare la distanza tra* P *ed* r_1 *e tra* P *ed* r_2*.*

Esercizio 5. *Si considerino i seguenti sistemi lineari (il primo nelle cinque variabili $x_1, \cdots, x_5$ ed il secondo nelle tre variabili x, y):*

$$a) \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 6x_5 & = & -1 \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 + 4x_5 & = & 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 & = & 5 \end{cases} \quad ; \quad b) \begin{cases} x + 2y & = & 6 \\ x + y & = & -3 \\ x & = & -6 \\ 2y & = & 3 \end{cases}$$

1. *(4 punti) Stabilire se il sistema a) è risolubile e nel caso lo sia calcolare tutte le sue soluzioni. Altrimenti calcolare tutte le sue soluzioni approssimate.*
2. *(3 punti) Stabilire se il sistema b) è risolubile e nel caso lo sia calcolare tutte le sue soluzioni. Altrimenti calcolare tutte le sue soluzioni approssimate.*