Programma del corso “Geometria 1”
Sapienza-Università di Roma
Ingegneria Civile, Ambiente e Territorio
a.a. 2017/2018
Docente: Prof. Giovanni Cerulli Irelli

Programma di massima

Sistemi di equazioni lineari :

Formalismo vettoriale	– Matrici
	– Matrici associate a sistemi di equazioni lineari
	– Sistemi di equazioni lineari come equazioni vettoriali
	– Teorema di Rouchè-Capelli
	– Forma parametrica delle soluzioni
Metodi di risoluzione	– Eliminazione di Gauss
	– Decomposizione LU
	– Decomposizione QR
	– Formula di Cramer (quando applicabile)
Applicazioni	– Circuiti elettrici
	– Reti di flusso (stradale o idraulico)
	– Approssimazione di dati statistici

Spazi vettoriali :

- Esempi ($\mathbb{R}^n$, vettori geometrici del piano e dello spazio, polinomi di grado minore o uguale ad n, funzioni continue reali di variabile reale)
- Combinazioni lineari
- Dipendenza ed indipendenza lineare
- Basi
- Dimensione
- Sottospazi vettoriali
- Sottospazi affini
- Formula di Grassmann

Applicazioni lineari :

- Definizione
- Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare
- Teorema della dimensione
- Matrice associata ad un'applicazione lineare in due basi date
- Moltiplicazione righe per colonne di matrici
- Inversa di una matrice quadrata
- Tecniche per il calcolo dell'inversa:
  - Algoritmo di inversione

Determinante :

- Definizione e proprietà
- Sviluppo di Laplace
- Teorema di Binet
- Tecniche di calcolo del determinante
- Tecniche per il calcolo dell'inversa:
  - Teorema di Cayley-Hamilton
  - Formula di Cramer

Spazi metrici :

- Forme bilineari
- Forme quadratiche
- Prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale
- Norma
- Angoli
- Distanza tra sottospazi affini

Approssimazioni lineari :

- Proiezione ortogonale
- Soluzioni approssimate di un sistema non risolubile di equazioni lineari
- Equazioni normali di un sistema di equazioni lineari
- Tecniche di calcolo delle soluzioni approssimate
- Polinomio approssimante di dati statistici

Autovalori ed autovettori :

- Interpretazione geometrica
- Matrici diagonalizzabili
- Teorema spettrale per matrici reali simmetriche

Coniche :

- Classificazione affine e metrica delle coniche

Tutti i risultati (a parte il teorema fondamentale dell'algebra) sono stati dimostrati a lezione.

Diario delle lezioni

Settimana 1: Lun 24/09: Presentazione del corso. Matrici mxn. Grafi orientati. Matrice di adiacenza di un grafo orientato. Somma di matrici.

Mar 25/09: Prodotto cartesiano di insiemi. Funzioni. Grafico di funzioni. Gruppi. Gruppi commutativi (o abeliani). L'insieme delle matrici mxn dotato della somma è un gruppo abeliano. Moltiplicazione per uno scalare e sue proprietà.

Mer 26/09: Matrice trasposta e sue proprietà. Matrici simmetriche e anti-simmetriche. Ogni matrice quadrata è la somma di una matrice simmetrica e di una matrice anti-simmetrica. Prodotto righe per colonne di una matrice riga con una matrice colonna.

Giov 27/09: Prodotto righe per colonne di matrici. Matrice identità. Proprietà del prodotto righe per colonne.

Settimana 2: Lun 01/10: Ancora sul prodotto righe per colonne. Matrici diagonali. Matrici scalari. Matrici quadrate. Matrici a blocchi.

Mar 02/10: Prodotto di matrici a blocchi. Potenze di matrici quadrate. Matrici nilpotenti. Esponenziale di una matrice nilpotente. Inversa destra ed inversa sinistra di una matrice. Per matrici quadrate le due inverse se esistono, coincidono e sono uniche. Presentazione del corso MATLAB FUNDAMENTALS da parte di Alessio Conte-Ambassador Mathworks del nostro Ateneo

Mer 03/10: Spazi vettoriali. Definizione e primi esempi: Matrici mxn, $\mathbb{R}^n$. Struttura vettoriale dei segmenti orientati del piano euclideo: somma.

Giov 04/10: Struttura vettoriale dei segmenti orientati del piano euclideo: proprietà della somma; definizione di prodotto per scalari e sue proprietà. Lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore od uguale ad n. Lo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale.

Settimana 3: Lun 08/10: Proprietà formali degli spazi vettoriali: legge di cancellazione della somma, legge di annullamento del prodotto per scalari. Combinazioni lineari.Span di k vettori.

Mar 09/10: Sottospazi vettoriali. L'interesezione di sottospazi è un sottospazio. Lo span di k vettori è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene i k vettori. Lemma di scambio. Dipendenza ed indipendenza lineare.

Mer 10/10: Lemma di dipendenza lineare. Lemma di indipendenza lineare. Teorema fondamentale dell'indipendenza lineare. Basi. Dimensione.

Giov 11/10: Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base. Algoritmo di generazione di una base. Basi per lo spazio vettoriale dei vettori geometrici nello spazio. Coordinate di un vettore in una base. La funzione ÒCoordinate in una baseÓ è biiettiva.

Settimana 4: Lun 15/10: Teorema del completamento di un insieme linearmente indipendente ad una basa data di uno spazio vettoriale. Somma di sottoinsiemi di uno spazio vettoriale. Sottospazi affini e loro dimensione. Formula di Grassmann.

Mar 16/10: Equazioni lineari in una e due variabili. Interpretazione geometrica delle soluzioni di un'equazione lineare in due variabili. Sistemi di equazioni lineari in due variabili ed interpretazione geometrica delle soluzioni. Matrice associata ad un sistema di equazioni lineari. Comandi MATLAB: sym, equationsToMatrix.

Mer 17/10: Matrice completa associata ad un sistema lineare. Sistemi lineari associati a circuiti elettrici. Sistemi lineari associati a reti stradali o idrauliche.

Giov 18/10: Lo spazio col(A) delle colonne di una matrice. Rango di una matrice. Teorema di Rouchè-Capelli. Nucleo di una matrice. Teorema della dimensione.

Settimana 5: Lun 22/10: Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare compatibile.

Mar 23/10: Lezione in Laboratorio di Via Tiburtina 205.

Mer 24/10: Sistemi a scala. Sistemi a scala con righe ridotte. Soluzioni base di sistemi a scala omogenei.

Giov 25/10: Definizione di sistemi equivalenti. Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema. Le operazioni elementari creano sistemi equivalenti. Operazioni elementari sulle righe di una matrice ((R1): scambio di righe; (R2): moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo; (R3) sostituzione di una riga con la somma di due righe). Matrici equivalenti per righe. La relazione Òessere equivalenti per righeÓ è una relazione di equivalenza sull'insieme delle matrici mxn (ovvero è riflessiva, simmetrica e transitiva). Se le matrici complete di due sistemi sono equivalenti per righe allora i due sistemi sono equivalenti. Teorema fondamentale sulla riduzione a scala (enunciato): ogni matrice A è equivalente ad una matrice a scala con righe ridotte, inoltre tale matrice è unica, si chiama la forma a scala ridotta della matrice A e si denota con rref(A). Comando MATLAB: rref(A). Esempio.

Settimana 6: Lun 29/10: Lezione annullata a causa allerta meteo. Questa lezione sarà recuperata Mercoledi 7 Novembre alle ore 12:30 in aula 4.

Mar 30/10: Lezione annullata a causa allerta meteo. Questa lezione sarà recuperata Mercoledi 12 Dicembre alle ore 12:30 in aula 4.

Mer 31/11: Dimostrazione del teorema fondamentale sulla riduzione a scala (Algoritmo di Gauss).

Giov 01/11: Vacanza Accademica

Settimana 7: Lun 05/11: Richiami sui sistemi lineari. Applicazioni dell' algoritmo di Gauss: suo utilizzo per calcolo del rango di una matrice; suo utilizzo per stabilire se dei vettori di $\mathbb{R}^m$ sono o meno linearmente indipendenti; suo utilizzo per trovare la base di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ di cui si conoscano i generatori.

Mar 06/11: Una matrice mxn ammette un'inversa destra se e solo se il suo rango è m. Calcolo delle inverse destre attraverso l'algoritmo di eliminazione di Gauss. Rango riga di una matrice. Somma diretta. Teorema di decomposizione: data una matrice A di taglia mxn, il rango di A è uguale al rango della sua trasposta; $\mathbb{R}^n$ è somma diretta di $\ker(A)$ e di $\mathrm{Col}(A^t)$.

Mer 07/11: Esempio di calcolo delle inverse destre. Utilizzo del teorema di decomposizione per completare una base di Ker(A) ad una base di $\mathbb{R}^n$ (dove A è una matrice mxn). Inverse sinistre. Una matrice ammette un'ainversa sinistra se e solo se ha rango uguale al numero delle sue colonne. un'inversa sinistra di una matrice A si trova trasponendo un'inversa destra di A^t. Matrici invertibili: condizioni equivalenti di invertibilità. Algoritmo di inversione.

Mer 07/11 Ore 12, aula 4 (Lezione straordinaria): Recupero della lezione del 29 Ottobre: Inversa di una matrice 2x2. Determinante di una matrice 2x2 (definizione). Se una matrice A ammette un'inversa destra B allora ogni sistema lineare AX=b è risolubile ed una soluzione è Bb. Se una matrice A ammette un'inversa sinistra allora ogni sistema risolubile AX=b ha l'unica soluzione Bb. Proprietà formali dell'inversa: inversa del prodotto, inversa della trasposta

Giov 08/11: Matrici elementari (di tipo R1, R2 ed R3). Le matrici elementari sono invertibili. Teorema: Se A e B sono equivalenti per righe allora esiste una matrice invertibile T tale che B=TA; tale matrice è prodotto di matrici elementari e si ottiene con l'algoritmo di inversione generalizzato: [A—1]–¿[B— T]. In particolare una matrice è invertibile se e solo se è prodotto di matrici elementari. Sistemi con parametro.

Settimana 8: Lun 12/11: Esercizi sulle matrici elementari; inversa di una matrice 2x2 come prodotto di matrici elementari. Algoritmo di inversione generalizzato. Ogni sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^m$ è il nucleo di una matrice che si trova con l'algoritmo di inversione generalizzato; Le equazioni del sistema omogeneo associato a tale matrice si chiamano le equazioni cartesiane di W.

Mar 13/11: Matrici triangolari inferiori e superiori (quadrate). Il prodotto di matrici triangolare inferiori (risp. superiori) è ancora triangolare inferiore (risp. superiore). L'inversa di una matrice triangolare inferiore (risp. superiore) è triangolare inferiore (risp. superiore). Matrici elementari triangolari inferiori. Matrici inferiormente riducibili. Se una matrice A è inferiormente riducibile, allora ammette una fattorizzazione A=LU, dove L è una matrice triangolare inferiore ed U è una matrice a scala. La matrice L si trova con l'algoritmo di inversione generalizzato.

Mer 14/11: Teorema sulla fattorizzazione LU di una matrice inferiormente riducibile: le componenti di L sono i moltiplicatori utilizzati nella riduzione a scala. Esempi ed esercizi. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{R}^m$. Esempi ed esercizi su equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{R}^m$.

Giov 15/11: Posizione reciproca di due rette in $\mathbb{R}^3$. Esempi ed esercizi. Esercizi su equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi di $\mathbb{R}^m$.

Settimana 9: Lun 19/11: Funzioni dalle matrici quadrate ad R. Funzioni alternanti sulle righe. Funzioni alternanti sulle colonne. Funzioni mulit-lineari sulle righe. Funzioni multi-lineari sulle colonne. Teorema/Definizione: Esiste un'unica funzione alternante sulle righe, multi-lineare sulle righe e che vale 1 sulla matrice identità; tale funzione si chiama determinante. Calcolo del determinante attraverso l'eliminazione di Gauss: determinante delle matrici elementari; det(EA)=det(E)det(A) per ogni matrice elementare E e per ogni matrice A; Esempi.

Mar 20/11: Lezione nel Laboratorio di via Tiburtina 205.

Mer 21/11: Determinante di matrici trangolari. Teorema di Binet (o del prodototto): det(AB)=det(A)det(B). Cor: il determinante dell'inversa è l'inverso del determinante. Teorema: il determinante è invariante per trasposizioni. Cor: il determinante è l'unica funzione alternante sulle colonne, multi-lineare sulle colonne e che vale 1 sulla matrice identità. Per calcolare il determinante possiamo agire sia sulle righe che sulle colonne. Esempi.

Giov 22/11: Seconda tecnica di calcolo del determinante: Sviluppi di Laplace rispetto ad una riga e ad una colonna. Per calcolare il determinante conviene operare sulle righe e sulle colonne per creare molti zeri, e poi utilizzare lo sviluppo di Laplace. Esempi. Matrice aggiunta. Utilizzo del determinante per calcolare la matrice inversa (formula di Cramer per l'inversa).

Settimana 10: Lun 26/11: Teorema di Cramer per la risoluzione di sistemi lineari quadrati che ammettono un'unica soluzione. Utilizzo della decomposizione LU per di una matrice quadrata A per calcolare il determinante di A e l'inversa di A (nel caso esista). Esercizi su sottospazi vettoriali.

Mar 27/11: Teorema degli orlati. Determinante di matrici triangolari a blocchi. Determinante di vandermonde ed interpolazione polinomiale.

Mer 28/11: Applicazioni lineari: definizione ed esempi. Nucleo ed immagine di applicazioni lineari. Il nucleo e l'immagine sono sottospazi vettoriali. un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è zero. Isomorfismi lineari. La funzione Òcoordinate in una base BÓ è un isomorfismo lineare: in particolare ogni spazio vettoriale (reale) di dimensione n è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$ ed ogni base induce un tale isomorfismo.

Giov 29/11: VALUTAZIONE DEL CORSO OPIS. Diagrammi commutativi. Esercizi su interpolazione polinomiale, teorema degli orlati e determinante di Vandermonde.

Settimana 11: Lun 03/12: un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base del suo dominio. Matrice associata ad un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali di dimensione finita.

Mar 04/12: Matrice del cambiamento di base. Esempi ed esercizi.

Merc 05/12: Esercizi su applicazioni lineari e cambiamenti di base. Applicazioni bilineari. Forme bilineari. Matrici associata ad una forma bilineare. Come cambia la matrice associata ad una forma bilineare in due basi diverse: Matrici congruenti. Come cambia la matrice associata ad un endomorfismo lineare in due basi differenti: Matrici coniugate.

Giov 06/12: Prodotti scalari. Esempi. Definizione di spazio metrico. Norma in uno spazio metrico. Versori. Versori di $\mathbb{R}^2$. Coseni direttori di una retta di $\mathbb{R}^2$. Versori nello spazio metrico delle funzioni C-infinito da [-pi,pi] ad R. Distanza tra due vettori di uno spazio metrico.

Settimana 12: Lun 10/12: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Vettori ortogonali. L' ortogonale di un sottopsazio vettoriale di uno spazio metrico è un sottospazio vettoriale. Decomposizione ortogonale di $\mathbb{R}^n$. L'ortogonale dell'ortognale di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è uguale a se stesso. Esempi ed esercizi sul concetto di ortogonalità.

Mar 11/12: Retta tangente ad una circonferenza del piano. Proiezione ortogonale di un vettore su un altro. La proiezione ortogonale di v su w è il multiplo di w più vicino a v. Distanza tra sottoinsiemi di uno spazio metrico. Teorema di Pitagora. Distanza Punto-Retta. Distanza Punto-Iperpiano.

Merc 12/12: Sottoinsiemi ortogonali e ortonormali di uno spazio metrico. Un insieme ortogonale è linearmente indipendente. Basi ortogonali e ortonormali di uno spazio metrico. Coefficienti di Fourier rispetto ad una base ortogonale. Esempio nel caso L^2. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Merc 12/12 ore 12:30 aula 4 (Lezione straordinaria): Recupero della lezione del 29 Ottobre. Fattorizzazione QR di una matrice. Proiezione ortogonale. La proiezione ortogonale di un vettore v su un sottospazio U è il vettore di U più vicino a v. Distanza tra un vettore ed un sottospazio vettoriale. Soluzioni approssimate nel senso dei minimi quadrati di sistemi lineari non risolubili; equazioni normali. Utilizzo della decomposizione QR per trovare le soluzioni approssimate di sistemi lineari non risolubili.

Giov 13/12: Proiettori (ovvero matrici che rappresentano una proiezione ortogonale su un sottospazio di $\mathbb{R}^n$). Una matrice è un proiettore se e solo se è idempotente e simmetrica. Isometrie di spazi metrici (definizione e qualche proprietà generale). Isometrie del piano: le uniche isometrie del piano sono le rotazioni e le riflessioni. Matrici di rotazione. Matrici di riflessione. Pendenza di una retta. Matrici ortogonali (definizione e prime proprietà).

Settimana 13: Lun 17/12: Angoli tra vettori di uno spazio metrico. Angolo tra due rette. Coseni direttori. Angolo tra due rette del piano, in termini delle loro pendenze. Fascio di rette (proprio e improprio). Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Proprietà del prodotto vettoriale. Direzione, verso e lunghezza del prodotto vettoriale. Il determinante di una matrice 2x2 come area orientata del parallelogramma generato dalle sue colonne. Area dei triangoli. Distanza punto-piano in $\mathbb{R}^3$, in termini del prodotto vettoriale. Distanza retta-retta in $\mathbb{R}^3$. Opzionale: Insiemi convessi, area di un insieme convesso del piano euclideo, l'area del trasformato di un insieme convesso C mediante un endomorfismo lineare L è uguale a —det(L)—Area(C).

Mar 18/12: Endomorfismi lineari diagonalizzabili (definizione). Assi di simmetria di un endomorfismo diagonalizzabile. Sottospazi invarianti per l'azione di un endomorfismo lineare. Matrici diagonalizzabili (definizione). Autovalori e autovettori di un endomorfismo lineare di uno spazio vettoriale. Esempi (matrici triangolari superiori, matrici di rotazione, matrici di riflessione rispetto ad una retta del piano). Polinomio caratteristico di una matrice. Polinomio caratteristico di matrici 2x2 e 3x3 in termini della traccia. Teorema fondamentale dell'algebra. Autovalori di una matrice di rotazione. Spettro di una matrice. Autospazio associato ad un autovalore. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine. La molteplicità geometrica è minore uguale alla molteplicità algebrica. Una matrice reale è diagonalizzabile su R se solo se 1) il suo spettro è reale e 2) la molteplicità geometrica di un autovalore è uguale alla sua molteplicità algebrica. Blocchi di Jordan sono matrici non diagonalizzabili.

Merc 19/12: Esempi ed esercizi sulla diagonalizzabilità di una matrice. Una matrice avente tutti autovalori distinti è diagonalizzabile. Endomorfismi ortogonalmente diagonalizzabili di uno spazio metrico. Matrici ortogonalmente diagonalizzabili. Teorema spettrale (per $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard): una matrice nxn è ortogonalemtne diagonalizzabile se e solo se è simmetrica. Dimostrazione: si osserva che le matrici simmetriche sono autoaggiunte e da questo si deduce 1) lo spettro è reale e 2) autospazi relativi ad autovalori distinti sono ortogonali [la dimostrazione di questa implicazione è contenuta nelle note e non è stata discussa a lezione]; 1)+2) implicano il teorema. Esempi ed esercizi su matrici ortogonalmente diagonalizzabili. Endomorfismo autoaggiunti di uno spazio metrico. Teorema spettrale: un endomorfismo di uno spazio metrico è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è autoaggiunto.

Giov 20/12: Coniche: classificazione metrica ed affine. Teorema di Cayley Hamilton. Utilizzo del teorema di Cayley-Hamilton per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile.

Roma, 03.09.2019 Prof. Giovanni Cerulli Irelli

Giovanni Cerulli Irelli