5 min

29 Marzo 2019 Nome, Cognome e Matricola

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice 4×4:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(4 punti) Dimostrare che A é invertibile, calcolandone il determinante.*
2. *(2 punti) Calcolare i cofattori C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}.*
3. *(1 punto) Usare il punto precedente per determinare l'unica soluzione del sistema $AX = e_1$.*
4. *(1 punto) Sapendo che il polinomio caratteristico di A è*

$$p_A(x) = x^4 - 6x^3 + 4x + 1$$

determinare l'inversa di A in funzione di A.

Sol.:

1) $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

2) $C_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$

$C_{12} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$ (1^a e 3^e colonne uguali)

$C_{13} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$ ''

$C_{14} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

3) $X = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $A^{-1} = -A^3 + 6A^2 - 4\mathbb{1}_4$