Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Appello straordinario riservato a fuori-corso e part-time
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

29 Marzo 2019

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice* 4×4*:*

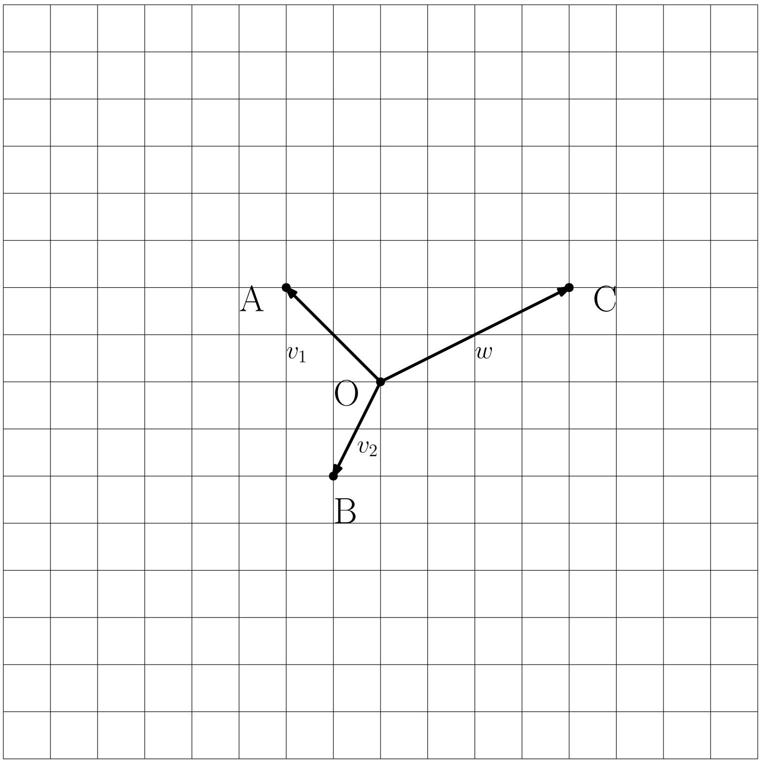
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(3 punti) Dimostrare che* A *é invertibile, calcolandone il determinante.*
2. *(2 punti) Calcolare i cofattori* C_{11}*,* C_{12}*,* C_{13}*,* C_{14}*.*
3. *(1 punto) Usare il punto precedente per determinare l'unica soluzione del sistema* $AX = e_1$*.*
4. *(1 punto) Sapendo che il polinomio caratteristico di* A *è*

$$p_A(x) = x^4 - 6x^3 + 4x + 1$$

determinare l'inversa di A *in funzione di* A*.*

Esercizio 2. *Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^2$ dei vettori geometrici del piano applicati al punto O si considerino i tre vettori $v_1 = \vec{OA}$, $v_2 = \vec{OB}$ e $w = \vec{OC}$ mostrati in figura:*



1. *(1 punto) Disegnare il vettore $u = (w + 3v_1) + v_2$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathcal{V}_O^2$.*
3. *(2 punti) Calcolare il vettore $X = F_{\mathcal{B}}(w) \in \mathbb{R}^2$ formato dalle coordinate di w nella base $\mathcal{B}$.*
4. *(2 punti) Calcolare il vettore $Y = F_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{R}^2$ formato dalle coordinate di u nella base $\mathcal{B}$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'angolo tra X e Y (in $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard).*

Esercizio 3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Sia $f : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$. Denotarla con A.*

2. *(2 punti) Trovare una base per il nucleo di f.*

3. *(2 punti) Trovare una base per l'immagine di f.*

4. *(1 punto) Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove*

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

   Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V.

5. *(1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{C}$.*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Dimostrare che essa è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(5 punti) Trovare una matrice B ortogonale ed una matrice D diagonale tali che $B^t AB = D$.*

Esercizio 5. *Nello spazio vettoriale* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *delle matrici* 2×2 *a coefficienti reali, si considerino i sottoinsiemi:*

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c = 0 \right\}.$$

1. *Dimostrare che* U *e* W *sono sottospazi vettoriali di* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
2. *Trovare la dimensione ed una base per* U.
3. *Trovare la dimensione ed una base per* W.
4. *Trovare la dimensione ed una base per i sottospazi* $U + W$ *e* $U \cap W$.