Nome, Cognome e Matricola

Prova scritta di Geometria 1
Appello straordinario riservato a fuori-corso, part-time e DSA
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

25 Ottobre 2019

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice* 4×4*:*

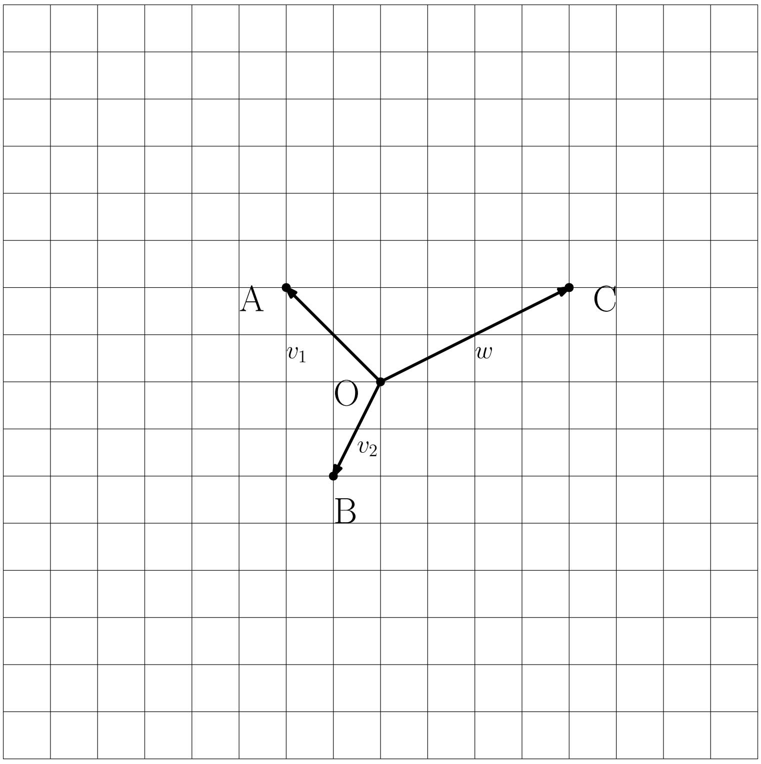
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(3 punti) Dimostrare che* A *é invertibile, calcolandone il determinante.*
2. *(2 punti) Calcolare i cofattori* C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}.
3. *(1 punto) Usare il punto precedente per determinare l'unica soluzione del sistema* $AX = e_1$.
4. *(1 punto) Sapendo che il polinomio caratteristico di* A *è*

$$p_A(x) = x^4 - 6x^3 - x + 1$$

determinare l'inversa di A *in funzione di* A.

Esercizio 2. *Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^2$ dei vettori geometrici del piano applicati al punto O si considerino i tre vettori $v_1 = \overrightarrow{OA}$, $v_2 = \overrightarrow{OB}$ e $w = \overrightarrow{OC}$ mostrati in figura:*



1. *(1 punto) Disegnare il vettore $u = (w + 3v_1) + v_2$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathcal{V}_O^2$.*
3. *(2 punti) Calcolare il vettore $X = F_{\mathcal{B}}(w) \in \mathbb{R}^2$ formato dalle coordinate di w nella base $\mathcal{B}$.*
4. *(2 punti) Calcolare il vettore $Y = F_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{R}^2$ formato dalle coordinate di u nella base $\mathcal{B}$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'angolo tra X e Y (in $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard).*

Esercizio 3. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione* 3 *e sia* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *una base di* V*. Sia* $f : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 + v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + 2v_2 + v_3.$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta* f *nella base* $\mathcal{B}$*. Denotarla con* A*.*
2. *(2 punti) Trovare una base per il nucleo di* f*.*
3. *(2 punti) Trovare una base per l'immagine di* f*.*
4. *(1 punto) Sia* $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ *dove*

   $$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

   Dimostrare che $\mathcal{C}$ *è una base di* V*.*
5. *(1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta* f *nella base* $\mathcal{C}$*.*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Dimostrare che essa è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(5 punti) Trovare una matrice B ortogonale ed una matrice D diagonale tali che $B^t AB = D$.*

Esercizio 5. *Studiare il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 6kx_2 + 3x_4 + 9x_6 & = & 3 \\ 2x_1 + 4kx_2 + 2x_3 + 10x_6 & = & 4k+2 \\ 2x_1 + 4kx_2 + 2x_4 + 2kx_5 + (6+2k)x_6 & = & 2k \end{cases}$$