

Nome, Cognome e Matricola

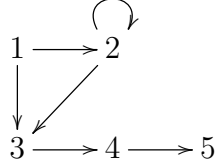
Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedì 01 Ottobre 2018

Esercizio 1. *Semplificare la seguente espressione matriciale:*

$$-(A^t A + B B^t)^t + B(B - A)^t + (B + A^t)^2 - (B - A)^2 - B(A^t + A) - (A + A^t)^t B + (A + A^t)(A - A^t)$$

Esercizio 2. Consideriamo il seguente grafo orientato G :



1. Determinare la matrice A associata al grafo G .
2. Determinare le matrici colonne di A .
3. Determinare le matrici riga di A .
4. Determinare $A_1 + 2A_2 - 3A_3$.
5. Calcolare $A^2 = AA$.
6. Determinare A^t ed il grafo associato ad A^t .

- Esercizio 3.** 1. Siano C e C' due matrici anti-simmetriche. Dimostrare che anche la somma $C + C'$ è anti-simmetrica.
2. Sia C una matrice anti-simmetrica e $c \in \mathbb{R}$ uno scalare. Dimostrare che cC è una matrice anti-simmetrica.
3. Dimostrare che l'unica matrice che è sia simmetrica che anti-simmetrica è la matrice nulla.
4. A lezione abbiamo visto che ogni matrice quadrata si può scrivere come la somma di una matrice simmetrica con una matrice anti-simmetrica. Dimostrare che tale decomposizione è unica. In altre parole, dimostrare la seguente affermazione:

Sia A una matrice quadrata. Supponiamo che esistano due matrici simmetriche B e B' e due matrici anti-simmetriche C e C' tali che

$$A = B + C, \quad A = B' + C'.$$

Dimostrare che allora $B = B'$ e $C = C'$.

Esercizio 4. • *In ognuno dei seguenti casi, calcolare $(AB)C$ e $A(BC)$.*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

- *Uno studente di ingegneria ottiene un punteggio di 19/30 all'esame di Analisi 1 (9 crediti) ed un punteggio di 27/30 all'esame di Disegno (6 crediti). Qual'è il punteggio minimo che deve ottenere all'esame di Geometria (9 crediti) affinché la media pesata dai crediti dei suoi voti in questi tre esami sia almeno 25/30?*

Esercizio 5. 1. *Trovare una matrice A di taglia 2×2 tale che $A^2 = -\mathbf{1}_2$.*

2. *Si considerino le matrici $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ed $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ calcolare AE_1 , E_1A , AE_2 , E_2A .*

3. *Sia A una matrice di taglia 2×2 tale che $AB = BA$ per ogni B . Dimostrare che allora A è una matrice scalare ovvero esiste uno scalare x tale che $A = x\mathbf{1}_2$.*

4. *Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Dimostrare la seguente uguaglianza di matrici:*

$$A^2 - 4A + 5\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_{2 \times 2}.$$