Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 3
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedi 15 Ottobre 2018

Esercizio 1. *1. Enunciare e dimostrare il lemma di scambio.*

2. Utilizzare (ripetutamente) il lemma di scambio e l'esistenza di generatori standard per dimostrare le seguenti uguaglianze di spazi vettoriali:

a) $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 2, 1 - x + x^2, 3x + x^2 \rangle$;

b) $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 1 - x, 1 + x, x^2 \rangle$;

c) $\mathbb{R}^2 = \langle (1,1)^t, (2,-1)^t \rangle$.

3. Dimostrare le uguaglianze del punto precedente direttamente.

Esercizio 2. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V. Sia $U = \langle \mathcal{B} \rangle$. Consideriamo i seguenti vettori di U:*

$$z_1 = 2v_1 - v_3, \quad z_2 = 2v_2 + v_3.$$

1. *Dimostrare che $\{z_1, z_2\}$ è linearmente indipendente.*
2. *Trovare due indici distinti i_1 e i_2 tali che $U = \langle \mathcal{B} \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\} \cup \{z_1, z_2\} \rangle$.*
3. *Trovare un indice i tale che $\{z_1, z_2, v_i\}$ è linearmente indipendente.*
4. *Qual'è la dimensione di U?*

Esercizio 3. *Determinare se l'insieme* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *è linearmwente indipendente oppure linearemente dipendente in ognuno dei seguenti casi:*

1. $v_1 = (1,1)^t$, $v_2 = (1,2)^t$, $v_3 = (-1,1)^t \in \mathbb{R}^2$;
2. $v_1 = (1,1,0)^t$, $v_2 = (1,2,1)^t$, $v_3 = (-1,1,0) \in \mathbb{R}^3$;
3. $v_1 = (1,1,0,1)^t$, $v_2 = (1,2,0,1)^t$, $v_3 = (-1,1,0,1) \in \mathbb{R}^4$;
4. $v_1 = 1 + x$, $v_2 = 1 + x - x^2$, $v_3 = 1 + x + x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;
5. $v_1 = \sin(x)$, $v_2 = \sin(2x)$, $v_3 = \sin(3x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Esercizio 4. *A lezione abbiamo visto che data una matrice $A \in Mat_{m\times n}$, lo span delle colonne di A coincide con l'insieme $I(A) = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ che quindi è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ contenente tutte le n colonne di A. Per ognuna delle seguenti matrici A e b, stabilire se le colonne di A sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti e se esiste un vettore $X \in \mathbb{R}^n$ tale che $AX = b$.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. 1. *Dimostrare che gli insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sono basi di $\mathbb{R}^2$.

2. *Trovare le coordinate dei vettori*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

in ognuna delle basi $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ *e* $\mathcal{B}_3$.