Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 4
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedi 22 Ottobre 2018

Esercizio 1. *Sia $n \geq 1$ e sia $V = Mat_{n \times n}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $n \times n$. Per ogni $1 \leq i, j \leq n$ definiamo la matrice $E_{ij} \in V$ come*

$$(E_{ij})_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \text{ e } j = \ell \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. *Scrivere le quattro matrici $\{E_{ij}\}$ nel caso $n = 2$.*
2. *Dimostrare che $\{E_{ij}\}$ è una base di V (per ogni n).*
3. *Calcolare la dimensione di V.*
4. *Dimostrare che i due sottoinsiemi $Sym(n) = \{A \in V | A^t = A\}$ e $ASym(n) = \{A \in V | A^t = -A\}$ sono sottospazi vettoriali di V.*
5. *Utilizzare la formula di Grassmann per dimostrare la seguente formula:*

$$dim\ Sym(n) + dim\ ASym(n) = n^2.$$

6. *Trovare una base di $Sym(n)$ ed una base di $ASym(n)$.*

Esercizio 2. *Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$*, stabilire, motivando la risposta, se sono o meno un sottospazio vettoriale, e nel caso lo siano trovare una base e calcolarne la dimensione: (*$X := (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$*)*

1. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
2. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$
3. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1^2 + x_2 - x_3 = 0\}$
4. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_1 \geq 0\}$
5. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 \geq 0,\, x_2 + x_3 = 0\}$
6. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 x_2 x_3 = 0\}$
7. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_2 + x_3 = 0\}$
8. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_2 + x_3 = 1\}$

Esercizio 3. *Per ognuno dei seguenti sottospazi U e W (dell'opportuno spazio vettoriale) utilizzare la formula di Grassmann per calcolare la dimensione di U, di W, di $U+W$ e di $U \cap W$.*

1. $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$, $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$.
2. $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$, $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$.
3. $U = Ker(A)$, $W = Col(A) \subseteq \mathbb{R}^2$ *dove A è la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. *Abbiamo visto che* $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \sin(4x)\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *è linearmente indipendente. Sia* $V = \langle \sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \sin(4x) \rangle$. *Si considerino i seguenti sottospazi di V:* $U = \langle \sin(x), \sin(2x), \sin(3x) \rangle$ *e* $W = \{f \in V |\, f(\frac{\pi}{2}) = 0\}$.

Esercizio 4. *Trovare base e dimensione di* $Ker(A)$ *e* $Col(A)$ *per ognuna delle seguenti matrici:*

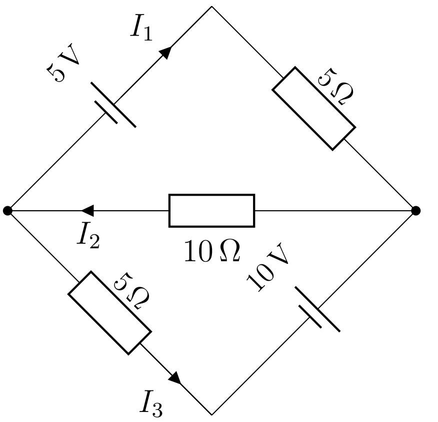
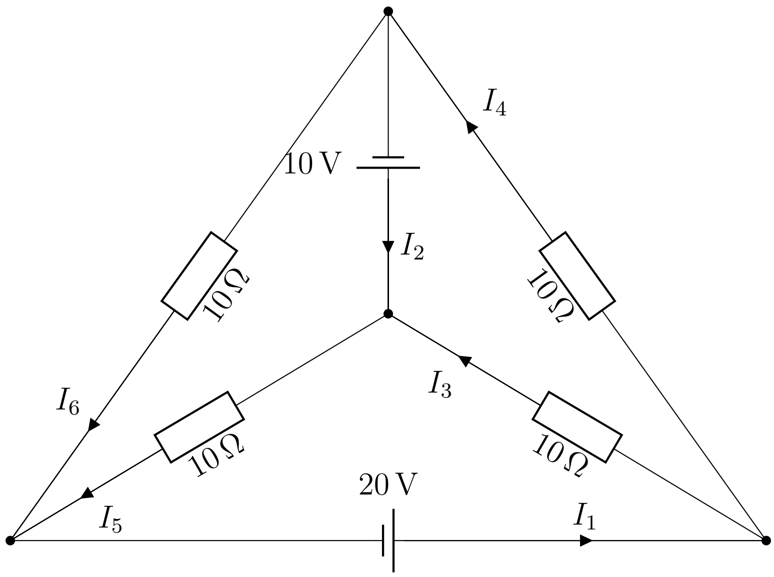
1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

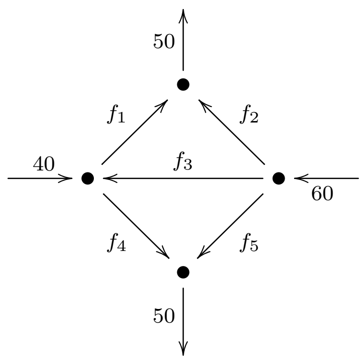
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

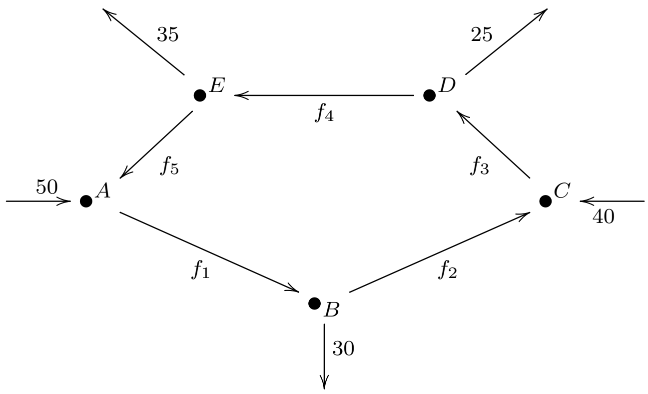
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. *Scrivere accanto ad ognuno dei seguenti circuiti la matrice completa associata al relativo sistema lineare:*


50
f_1
f_2
40
f_3
60
f_4
f_5
50


35
25
E
D
f_4
f_5
f_3
50
A
C
40
f_1
f_2
B
30