Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 5
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedi 29 Ottobre 2018

Esercizio 1. *Studiare (ovvero verificare che siano compatibili e nel caso lo siano trovare tutte le soluzioni) i seguenti sistemi lineari (il primo nelle cinque variabili* $x_1, \cdots, x_5$ *ed il secondo nelle tre variabili* x, y, z*):*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 6x_5 & = & -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 & = & 5 \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 8x_4 + 4x_5 & = & 6 \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \\ x - y - z & = & 1 \\ 2x + z & = & 1 \\ \sqrt{2}x + 3y - z & = & 1 \end{array} \right.$$

Scrivere le soluzioni come sottospazi affini, ovvero nella forma $X_0 + \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$.

Esercizio 2. *Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$*, stabilire, motivando la risposta, se sono o meno un sottospazio vettoriale, e nel caso lo siano trovare una base e calcolarne la dimensione: (*$X := (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$*)*

1. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, 2x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$
2. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$
3. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, -x_1^2 + x_3 = 0\}$
4. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, -x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_1 \geq 0\}$
5. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 x_2^2 x_3 = 0\}$
6. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0,\, x_2 - x_3 = 0\}$
7. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0,\, x_2 - x_3 = 1\}$

Esercizio 3. *Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi $\mathcal{B}$ dell'opportuno spazio vettoriale, stabilre se forma una base e nel caso la formi, calcolare $F_{\mathcal{B}}(v)$ ed $F_{\mathcal{B}}^{-1}(X)$. (Si ricordi che $F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ è la funzione "coordinate" nella base $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Abbiamo dimostrato che tale funzione è iniettiva e suriettiva, quindi invertibile. L'inversa $F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \to V$ associa ad $X = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ il vettore $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in V$.)*

1. $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, $v = 2$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. *Sia* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *uno spazio vettoriale di dimensione* 3 *generato da tre vettori* v_1, v_2, v_3. *Si considerino:*

   $\mathcal{B} = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3\} \subset V$, $v = v_1$, $X = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Consideriamo le seguenti matrici* A *e* C *di taglia* 3×4*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcolare rref(A) e rref(C), evidenziando le operazioni elementari effettuate in ogni passaggio. Concludere che A *e* C *sono equivalenti per righe.*

Esercizio 5. *Calcolare le matrici a scala ridotte (rref) equivalenti per righe alle seguenti matrici, evidenziando le operazioni elementari effettuate ad ogni passaggio. Verificare il risultato con MATLAB.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$