Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 10
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedi 03 Dicembre 2018

Esercizio 1. *Denotiamo con*

$$D(x_0, \cdots, x_n) = det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

il determinante di Vandermonde calcolato sugli (n+1) numeri $x_0, \cdots, x_n$. *Calcolare i seguenti determinanti di Vandermonde e verificare la formula vista a lezione* $D(x_0, \cdots, x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$.

1. $D(0, 1)$;
2. $D(1, 3)$;
3. $D(1, 2, 3)$;
4. $D(0, 1, 2, 3)$.

Esercizio 2. *Utilizzando la formula di Cramer, trovare il polinomio interpolatore di ognuna delle seguenti collezioni di dati e disegnare il grafico.*

1. $(0, 1)$, $(1, 2)$;
2. $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$;
3. $(-1, -4)$, $(1, 2)$, $(3, -4)$;
4. $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, -3)$, $(2, 4)$.

Esercizio 3. *Usando il teorema degli orlati, calcolare il rango delle seguenti matrici:*

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare.*

1. *Cosa vuol dire che L è lineare? (Dare la definizione.)*

2. *Dimostrare che se L è iniettiva e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ è linearmente indipendente, allora anche $L(\mathcal{B}) = \{L(v_1), L(v_2), L(v_3)\} \subset W$ è linearmente indipendente. Generalizzare ad un insieme linearmente indipendente $\mathcal{B}$ con un numero k arbitrario di elementi.*

3. *Dimostrare che se $U \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, allora $L(U) = \{L(u) \mid u \in U\} \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale.*

4. *Dimostrare che se $U \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale ed L è iniettiva, allora $U \simeq L(U)$.*

5. *Dimostrare che se $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V ed L è un isomorfismo lineare, allora $L(\mathcal{B})$ è una base di W.*

Esercizio 5. *1. Sia $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'applicazione lineare data da $L(p) = 2p' + p''$, dove p' e p'' denotano rispettivamente la derivata prima e seconda di p. Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}_3}"'] & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \arrow[d, "F_{\mathcal{C}_2}"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

dove $\mathcal{C}_n = \{1, x, \cdots, x^n\}$ denota la base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

2. Si considerino le due basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^2$, e le due matrici che hanno tali vettori per colonne:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Denotiamo inoltre con $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ la base standard di $\mathbb{R}^2$. Verificare che i due quadrati del seguente diagramma commutano

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{1}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "\mathbf{1}_2"'] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "S_{B_1}"'] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "S_{B_2}"] \end{tikzcd}$$

Sia $C = B_2^{-1} B_1$. Calcolare C e notare che essa rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{1}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "S_C"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

C si chiama "matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$".