Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 11
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedi 10 Dicembre 2018

Esercizio 1. *Dimostrare che i seguenti insiemi sono linearmente indipendenti.*

1. $\{1-x, 1+x, 2x+3x^2\} \subset \mathbb{R}[x]$
2. $\{2, 1+x, 1+x+x^2\} \subset \mathbb{R}[x]$
3. $\{2+x^2, 1+x+x^2+x^4, 1-x+10x^3-20x^6\} \subset \mathbb{R}[x]$
4. *Sia* $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\} \subset \mathbb{R}[x]$ *un insieme di polinomi aventi* gradi distinti*, diciamo* $deg(p_1) = d_1 < deg(p_2) = d_2 < \cdots < deg(p_k) = d_k$*. Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è linearmente indipendente. (Suggerimento: la matrice* $(F_{\mathcal{C}}(p_1)|\cdots|F_{\mathcal{C}}(p_k))$ *è una matrice che ha* d_k *righe e* k *colonne. Dove sono i pivot delle righe* $d_1, d_2, \cdots, d_k$*? Qual'è il suo rango?)*

Esercizio 2. *Motivando la risposta, in ognuno dei seguenti casi stabilire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni date e nel caso esista trovare tutte le matrici A tali che $T = S_A$:*

1.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *1. Si considerino le seguenti basi di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \right\}$$

Trovare le matrici B *e* C *di cambiamento di base da* $\mathcal{B}_1$ *a* $\mathcal{B}_2$ *e da* $\mathcal{B}_2$ *a* $\mathcal{B}_1$*, rispettivamente.*

2. Consideriamo i polinomi

$$\begin{array}{lll} p_1(x) = x^2 - 2x, & p_2(x) = 1 + 2x, & p_3(x) = 2 - x^2; \\ q_1(x) = -1 + x, & q_2(x) = -1 + x - x^2, & q_3(x) = 2x + 2x^2. \end{array}$$

Dimostrare che i due insiemi $\mathcal{B}_1 := \{p_1, p_2, p_3\}$ *e* $\mathcal{B}_2 := \{q_1, q_2, q_3\}$ *sono basi dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *e trovare la matrice di cambiamento di base* da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$*.*

Esercizio 4. *Sia* $\mathcal{B} = \{2, 1-x, 2x+3x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. *Dall'esercizio 1 sappiamo che* $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. *Sia* $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$T(2) = 1 - x + x^2, \quad T(1-x) = 1 + x + 2x^2 + x^3, \quad T(2x + 3x^2) = 1 - x - x^3.$$

Trovare una base del nucelo ed una base dell'immagine di T.

Esercizio 5. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. *Trovare la matrice* C *che rappresenta* S_A *nella base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 6. *Si consideri la seguente applicazione bilineare su* $\mathbb{R}^2$

$$b(X,Y) = 4x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

Trovare la matrice A_b *che rappresenta* b *nella base canonica e la matrice* $A_{b,\mathcal{B}}$ *che rappresenta* b *nella base* $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. *Dedurre che*

$$b(X,X) = \frac{7}{2}(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2.$$