Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 12
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedi 17 Dicembre 2018

Esercizio 1 (Eser 1, pg. 341). *In ciascuno dei seguenti casi, si scriva il vettore X come somma di un vettore in U e di un vettore in $U^{\perp}$.*

1. $X = (3, -1, 2)^t$, $U = \langle (1, 2, -1)^t, (2, 0, 1)^t \rangle$;
2. $X = (3, 0, 2, 1)^t$, $U = \langle (1, 1, 1, 1)^t, (1, 1, -1, -1)^t, (1, -1, 1, -1)^t \rangle$;
3. $X = (a, b, c, d)^t$, $U = \langle (1, -1, 2, 0)^t, (-1, 1, 1, 1)^t \rangle$.

Esercizio 2. *Trovare la matrice di proiezione ortogonale sul seguente sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

e calcolare la distanza del punto $P = (6, 3, -6, -3)^t \in \mathbb{R}^4$ *da* U*.*

Esercizio 3. *Stabilire, motivando la risposta, quali delle seguenti matrici sono ortogonali.*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. *Su* $\mathbb{R}^2$ *si consideri la funzione bilineare* $b_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *data da* $b_A(X, Y) = {}^tXAY$ *dove* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Dimostrare che* b_A *definisce un prodotto scalare su* $\mathbb{R}^2$.
2. *Calcolare la norma di* $e_1 = (1,0)^t$ *ed* $e_2 = (0,1)^t$ *nello spazio metrico* $(\mathbb{R}^2, b_A)$.
3. *Il coseno dell'angolo formato da* $e_1 = (1,0)^t$ *ed* $e_2 = (0,1)^t$ *nello spazio metrico* $(\mathbb{R}^2, b_A)$ *definito come* $\cos(e_1, e_2) = \frac{b_A(e_1,e_2)}{||e_1||_{b_A}||e_2||_{b_A}}$. *Calcolare* $\cos(e_1, e_2)$.
4. *Trovare una base ortonormale* $\mathcal{B}$ *di* $(\mathbb{R}^2, b_A)$ *applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base* $\{e_1, e_2\}$.
5. *Utilizzando lo sviluppo di Fourier, scrivere il vettore* $v = (2,4)^t$ *come combinazione lineare degli elementi della base* $\mathcal{B}$.

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calcolare la decomposizione QR di A.*
2. *Utilizzare la decomposizione QR di A per calcolare tutte le soluzioni approssimate del sistema $AX = b$.*

Esercizio 6. *Si determini il polinomio approssimante* $p_1(x)$ *di grado* 1 *ed il polinomio approssimante* $p_2(x)$ *di grado* 2 *che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i seguenti dati:*

$$(-1, 0), (0, 2), (1, 1), (3, -1).$$

Disegnare il grafico.
(Questo argomento non è stato discusso ampiamente a lezione ma si possono vedere le pagine 45-46-47-48 delle note di questa settimana. Lunedi ne parlerò a lezione).
[Il risultato può essere verificato con MATLAB utilizzando i comandi **`polyfit`** *e* **`polyval`**- *consultare la guida di MATLAB per informazioni su questi comandi].*