Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 13
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedi 24 Dicembre 2018

Esercizio 1. *Si considerino le rette affini di* $\mathbb{R}^3$ $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calcolare il prodotto vettoriale* $n = v_1 \wedge v_2$ *e la sua norma. Fare un disegno per illustrare verso e direzione di* n *rispetto a* v_1 *e* v_2.
2. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $0, v_1, v_2$ *(qui* v_1 *e* v_2 *sono pensati come punti).*
3. *Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2.
4. *Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.
5. *Trovare la proiezione ortogonale di* P *sulla retta* r_1 *(ovvero il punto di* r_1 *più vicino a* P*) e denominarla* Q_1.
6. *Trovare la proiezione ortogonale di* P *sulla retta* r_1 *(ovvero il punto di* r_1 *più vicino a* P*) e denominarla* Q_2.
7. *Calcolare la distanza tra* P *ed* r_1 *e tra* P *ed* r_2.
8. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* P, Q_1 *e* Q_2.

Esercizio 2. *Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici utilizzando le formule viste a lezione.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Verificare il risultato con MATLAB (il comando `charpoly` *restituisce i coefficienti del polinomio caratteristico).*

Esercizio 3. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. *Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base diagonalizzante, una matrice B ed una matrice diagonale tali che $B^{-1}AB = D$.*

2. *Se A è diagonalizzabile è facile calcolare le sue potenze: se $B^{-1}AB = D$ allora $A^n = BD^nB^{-1}$. Dimostrare questa affermazione ed utilizzarla per calcolare la decima potenza della matrice A.*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Stabilire se la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ e nel caso lo sia trovare una base diagonalizzante, una matrice B ortogonale ed una matrice diagonale tali che $B^t AB = D$.

Esercizio 5. 1. *Sia A una matrice simile alla matrice diagonale $D = diag(1, 2, 3)$. Calcolare il polinomio caratteristico di A. Dimostrare che A è invertibile e calcolare l'inversa (in funzione di A) utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton. Calcolare il determinante e la traccia di A. Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*

2. *Utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton calcolare l'inversa di*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. *Si consideri il polinomio*

$$p(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - x_1 - x_2 - 1.$$

Ridurre a forma canonica metrica e affine la conica $\mathcal{C}_p$, specificando i cambiamenti di coordinate.